Matematika EP1 vizsga megoldása, 2014. jún. 17.

I. rész: Számítási feladatok

1. Határozzuk meg az

$$a_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) + n^2}{n^3}$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Használva, hogy $|\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)| \leq 1$, a határérték 0-nak adódik.

2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(8 - 4x)}{4 - x^2} =?$$

Megoldás: 1.

3. Adott egy egységsugarú gömb. A gömbbe írható hengerek közül tekintsük azt, amelyiknek legnagyobb felszínű a palástja. Mekkora ezen henger alapkörének a sugara?

Megoldás: Az r sugár függvényében a palást felszíne $4\pi r\sqrt{1 - r^2}$. Ennek a maximuma az $r = 1/\sqrt{2}$-nél van.

4. Mekkora annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az $y = 1/(1 + x^2)$ és az $y = 1/5$ görbék határolnak?

Megoldás:

$$\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{5} \right) \mathrm{d}x = 2 \arctan 2 - \frac{4}{5}.$$

5. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét, ha létezik.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -11 & 9 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Mekkora szöget zár be egymással az $x + 3y = 8$ egyenletű sík és az alábbi egyenes?

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 \end{cases}$$

Megoldás: A sík normálvektora $(1, 3, 0)$, az egyenes irányvektora $(2, -4, 0)$, amelyek φ szögére

$$\cos \varphi = \frac{\langle (1, 3, 0), (2, -4, 0) \rangle}{|(1, 3, 0)| \cdot |(2, -4, 0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ezért $\varphi = 3\pi/4$, tehát a sík és az egyenes szöge $\pi/4$.

II. rész: Elméleti feladatok

7. Igaz-e, hogy egy monoton sorozat mindig konvergens? Ha igen, indokoljunk, ha nem, adjunk ellenpéldát.

   Megoldás: Nem igaz, pl. az $a_n = n$ sorozat monoton növő, de végtelenhez tart, tehát divergens. A konvergenciához korlátosságot is fel kéne tenni.

8. Mit állít a Cauchy-féle középértéktétel?

   Megoldás: Ld. jegyzet.

9. Legyen f az (a, b) intervallumon differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy f szigorúan monoton csökken az (a, b)-n, akkor mit mondhatunk a deriváltjáról? Mit kell feltenni az $f'(x)$ deriváltfüggényre ahhoz, hogy abból az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenése következzen?

   Megoldás: Szigorúan monoton csökkenő f differenciálható függvény esetén $f'(x) \leq 0$ az (a, b) intervallumon. Másrészt ha $f'(x) < 0$ az (a, b) intervallumon, akkor lehet az f függvény szigorúan monoton csökkenésére következtetni.

10. Legyen A egy $n \times m$-es, B pedig egy $k \times l$-es mátrix. Mikor értelmezett az AB mátrixszorzat? Hogyan számíthatók ki az elemei?

    Megoldás: Ha $m = k$. Az AB mátrixszorzat i-edik sorának j-edik eleme $\sum_{t=1}^{k} A_{it}B_{tj}$.

11. Alteret alkotnak-e azok az $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, amelyeknek a második koordinátája 2? A választ indokoljuk.

    Megoldás: Nem alkotnak alteret, mert két ilyen vektor összegének második koordinátája 4, tehát a vektorok összeadásának művelete kivezet a halmazból.

12. Ha tudjuk, hogy egy sík normálvektora és egy egyenes irányvektora merőleges, akkor mit mondhatunk a közös pontjaik számáról?

    Megoldás: Ebben az esetben az egyenes és a sík vagy egymással párhuzamos és nincs közös pontjuk, vagy a sík tartalmazza az egyenest és akkor végtelen sok közös pontjuk van.

Minden feladat 5 pontos. Az eredményes vizsgához mindkét részből külön-külön is legalább 9 pontot el kell érni.