**Név:** ......................................
**Neptun-kód:** ..............................

| ZH | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | V | $\sum$ | jegy |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

# Matematika EP1 vizsga, 2016. jan. 6.

**Integrálási feladatok** (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az
$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: alkalmazzuk a parciális integrálás formuláját.

2. Számítsuk ki az
$$\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x-7}{(x^2-7x-9)^3}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált. Az eredményként kapott tagokat nem kell egyszerűsíteni és összevonni.

3. Egy téli napon a külső hőmérséklet a $h_k(t) = 5\sin\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)$ °C függvény szerint alakul $t$ órakor. A lakás belső hőmérséklete $h_b(t) = 20\,^\circ\mathrm{C}$ állandó. A lakásból távozó hőteljesítmény a külső és belső hőmérséklet különbségével arányos, az arányossági tényező $\kappa = 100\,\mathrm{W}/^\circ\mathrm{C}$. Számítsuk ki a 9 és 21 óra között a lakásból távozott hő mennyiségét, amelynek Wh-ban kifejezett értéke éppen a $t = 9$ és $t = 21$ között a $h_b(t)$ és $h_k(t)$ függvények grafikonja közé eső terület $\kappa$-szorosa.

**Számítási feladatok**

4. Tekintsük az
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
mátrixokat. Ezek közül az összes lehetséges módon válasszunk ki két különbözőt, és szorozzuk össze őket egymással, ha lehet. Amelyik mátrixnak van determinánsa, azt is határozzuk meg.

5. Tekintsük az $\underline{u}_1 = (1,-2,2)$ és $\underline{u}_2 = (2,2,1)$ egymásra merőleges vektorokat és a $\underline{v} = (9,9,9)$ vektort. Legyen $\underline{v}_1$ a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos, $\underline{v}_2$ pedig az $\underline{u}_1$-re merőleges komponense. Legyen továbbá $\underline{v}_3$ a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{u}_2$-vel párhuzamos, $\underline{v}_4$ pedig az $\underline{u}_2$-re merőleges komponense. Számítsuk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorokat, majd ellenőrizzük, hogy $\underline{v}_1 - \underline{v}_4$ merőleges az $\underline{u}_1$ és az $\underline{u}_2$ vektorra is.

6. Mennyi az
$$a_n = \frac{(3n^5 - 2^n)^2}{2n + 4^{n+1}}$$
sorozat határértéke?

**Elméleti feladatok**

7. Tekintsük az
$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszert, ahol $x$ és $y$ az ismeretlenek. Hány megoldása lehet az egyenletrendszernek? Adjuk meg az összes lehetséges megoldásszámot. Mi annak a feltétele, hogy pontosan egy megoldás legyen? Adjunk példát arra az esetre, amikor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, és a példában ellenőrizzük ennek a feltételét.

8. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt (az egyszeres deriváltakra vonatkozó változatát). Az alábbi két határérték közül melyik esetben alkalmazható? Ha alkalmazható, használjuk, ha nem, melyik feltétel sérül? Számítsuk is ki a határértékeket.
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

9. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt. Számoljuk ki a segítségével az alábbi határozott integrált. Adjuk meg az összes primitív függvényt ebben az esetben.
$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos 2x + 4x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Minden feladat 7 pontos.