Név:	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy
Neptun-kód:													

Matematika EP1 vizsga, 2016. jan. 13.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az
$$\int \frac{4x-10}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sin^5 x \cos x \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Tekintsük az $x^2 + y^2/3 = 1$ egyenletű ellipszist. Integrálással számítsuk ki annak az ellipszoidnak a térfogatát, amelyet az ellipszis x tengely körüli megforgatásával kapunk.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\begin{cases} x = t + 10 \\ y = -3t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x = 5t - 7 \\ y = 4t - 7 \\ z = -t + p \end{cases}$$
egyeneseket a térben, ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter. Hogyan kell p értékét úgy megválasztani, hogy a két egyenesnek legyen metszéspontja? Adjuk meg a metszéspont koordinátáit.

5. A síkban két tengelyes tükrözés egymás után alkalmazva megegyezik azzal az elforgatással, amelynek középpontja a tengelyek metszéspontja, szöge pedig a tengelyek által bezárt szög kétszerese. Ellenőrizzük ezt a tényt a következő esetben. Legyen A az $\mathbb{R}^2$ sík $y = x$ egyenesére való tükrözés mátrixa, B az y tengelyre való tükrözésé, C pedig az origó körüli $+90°$-kal való (óramutató járásával ellentétes irányú) forgatás mátrixa. Tetszőleges $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorra az A-nak majd a B-nek megfelelő tükrözést alkalmazva a $BA\underline{v}$ vektorhoz jutunk, a C-nek megfelelő elforgatás a $\underline{v}$ vektort $C\underline{v}$-be viszi, tehát a fenti állítás ebben az esetben a $BA = C$ egyenlőséget jelenti. Írjuk fel az A, B, C mátrixokat, és ellenőrizzük, hogy $BA = C$ valóban fennáll.

6. Mekkorák a befogói annak a derékszögű háromszögnek, amely minimális területű azon háromszögek közül, amelyeket egy $(5, 3)$ ponton átmenő egyenes és a koordinátatengelyek pozitív oldalai határolnak?

Elméleti feladatok

7. (a) Írjuk fel általában, hogyan kell egy 3×3-as determinánst a második sora szerint kifejteni.
   (b) Az alábbi mátrix néhány eleme nem olvasható. Igazoljuk, hogy a determinánsa a *-gal jelölt elemek ismerete nélkül is meghatározható. Számoljuk ki a determinánst.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & * \\ 1 & 4 & -2 & * \\ -5 & 2 & 1 & * \end{pmatrix}$$

8. Egy a_n sorozat esetén legyen $b_n = a_{2n}$ a sorozat minden páros indexű eleméből képzett részsorozat, $c_n = a_{2n-1}$ pedig a páratlan indexű elemekből képzett részsorozat. Tudjuk, hogy a b_n és a c_n sorozat is konvergens. Mitől függ, hogy ekkora az a_n sorozat is konvergens-e vagy nem? Adjunk olyan példát, amikor b_n és c_n konvergens és a_n is az, ill. egy olyan példát, amikor b_n és c_n konvergens de a_n nem.

9. Definiáljuk egy $f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltját. A definíció alapján számítsuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját az $x_0 = 0$ pontban. Segítség: használjuk a nevezetes határértékeket.

Minden feladat 7 pontos.