

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2016. jan. 27.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az

$$\int x \ln x \, dx$$

határozatlan integrált. Segítség: alkalmazzunk parciális integrálást.

2. Számítsuk ki az

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sqrt[5]{x^{-2}} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx$$

határozott integrált.

3. Igazoljuk, hogy az $y = x + 5$ egyenes ugyanakkora területet zár közre az $f(x) = (x + 2)^2 + 3$ és a $g(x) = \sqrt{x + 2} + 3$ függvény grafikonjával is. Ezeket a területeket számoljuk ki integrálással.

Számítási feladatok

4. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.

$$3x + 13y - 6z = 13$$

$$2x + 9y - 5z = 8$$

$$x + 2y + 5z = 9$$

5. Adottak a $2x - 4y + 3z = 9$ és az $5x + 4y + 2z = -4$ egyenletű síkok. Ellenőrizzük, hogy ezek merőlegesek egymásra. Írjuk fel a metszésvonaluk irányvektorát. Segítség: a keresett vektor merőleges mindkét sík normálvektorára.

6. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x + 1}$$

függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Számítsuk ki a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélein, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell 2×2 -es mátrixokat összeszorozni, majd adjuk meg ennek a műveletnek a tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egység létezése, inverz).

8. Tegyük fel, hogy a_n és b_n két korlátos és monoton sorozat. Korlátos-e ekkor az összegük? Monoton-e az összegük? Konvergens-e az összegük? Az összegre vonatkozó tulajdonságokat külön-külön igazoljunk (esetleg tanult tételekre hivatkozva), vagy adjunk rájuk ellenpéldát.

9. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények egy x_0 pontban (legalább) másodrendben érintik egymást? Legyen $f(x) = \cos x$ és $g(x) = c + \sqrt{r^2 - x^2}$, ahol c és r két valós paraméter. A $g(x)$ függvény grafikonja ekkor a $(0, c)$ középpontú r sugarú kör felső íve. Hogyan kell a c és r paramétereket úgy megválasztani, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $x_0 = 0$ pontban másodrendben érintsék egymást, azaz mi az $f(x)$ függvény simulóköre az $x_0 = 0$ -ban?

Minden feladat 7 pontos.