Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2015. dec. 21.

1. Definiáljuk, mit értünk egy sorozat határértékén. Mennyi az

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+3}$$

sorozat határértéke? A definíció alapján adjunk meg egy $\varepsilon = 0,1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

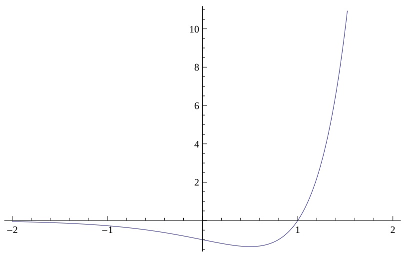
Megoldás: Ld. jegyzet. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. A definíció alapján

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}+3}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n}+3} < \varepsilon \iff \sqrt{n}+3 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\right)^2,$$

ami $\varepsilon = 0,1$ esetén választható 49-nek.

2. Vizsgáljuk meg az $f(x) = (x-1)e^{2x}$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, milyen intervallumon növekvő, csökkenő, konvex ill. konkáv. Adjuk meg a lokális szélsőértékeinek és inflexiós pontjainek helyét. (Mindez táblázatos formában is megadható.) Számoljuk ki a függvény határértékét $+\infty$-ben és $-\infty$-ben, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

Megoldás: Értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. $f'(x) = (2x-1)e^{2x}$, ezért lokális szélsőérték lehet az $x = 1/2$ pontban. Itt lokális minimum van, mert a derivált negatívból pozitívba vált. Az f függvény tehát $(-\infty, 1/2]$-en monoton csökkenő, $[1/2, \infty)$-en monoton növő. $f''(x) = 4xe^{2x}$, ezért inflexiós pont lehet az $x = 0$ pontban. Valóban inflexiós pont az $x = 0$, mert itt a második derivált negatívból pozitívba vált. Az f függvény tehát $(-\infty, 0]$-n konkáv, $[0, \infty)$-en konvex. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.



3. Mondjuk ki a Cauchy-féle középértéktételt. Találjuk meg a tétel állításában szereplő pontot az $[a,b] = [0,1]$ intervallumon, ha $f(x) = x^3$ és $g(x) = x^2$.

Megoldás: Ld. jegyzet. Olyan $c \in (0,1)$ pontot keresünk, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}$$

Mivel az adott függvényekkel $f'(x) = 3x^2$ és $g'(x) = 2x$, a fenti bal oldal $3c/2$, míg a jobb oldal 1, ezért $c = 2/3$.

4. Mi a geometriai jelentése három $\mathbb{R}^3$-beli vektor vegyesszorzatának? Adott $\underline{a} = (3, -4, 1)$, $\underline{b} = (2, 8, 5)$ és $\underline{c} = (4, -1, 3)$ vektorok esetén számoljuk ki a szorzat értékét.

Megoldás: A három vektor által feszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg.

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

5. Hogyan értelmezzük az improprius integrált nem korlátos integrandus és végtelen intervallum esetén. Ezt az alábbi két példán mutassuk be:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = \infty,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \int_1^K \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^K = \lim_{K\to\infty} \left(-\frac{1}{2K^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Tekintsük a $3x + 4y - z = 5$ egyenletű síkot és az

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 5 - t \\ z = \text{❄}t + \text{✷} \end{cases}$$

egyenletrendszerrel adott egyenest, ahol ❄ és ✷ tetszőlegesen választható valós számok (paraméterek). Hány metszéspontja lehet a síknak és az egyenesnek? A ❄ és ✷ paraméterek megfelelő megválasztásával adjunk mindegyik lehetőségre egy-egy példát.

Megoldás: A metszéspontok száma 0, 1 vagy végtelen lehet. A metszéspontokat az egyenes egyenletrendszerében szereplő kifejezéseket a sík egyenletébe beírva kaphatjuk meg, azaz

$$3(2t-3) + 4(5-t) - \left(\text{❄}t + \text{✷}\right) = 5.$$

Rendezve

$$\left(2 - \text{❄}\right) t = \text{✷} - 6.$$

Ennek az egyenletnek akkor nincs megoldása, ha ❄ $= 2$ és ✷ $\neq 6$; egy megoldása van minden olyan esetben, amikor ❄ $\neq 2$; végtelen sok megoldása van, ha ❄ $= 2$ és ✷ $= 6$.

7. Végezzük el az

$$\int \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + x - 12}\, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált.

Megoldás: A számlálót $3x^2 + 5 - 20 = 3(x^2 + x - 12) + (2x + 1) + 15$ alakban írjuk fel. A nevező szorzattá alakítva $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$, majd parciális törtekre bontunk. Ehhez keressük azokat az A és B számokat, hogy

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4},$$

azaz $1 = A(x+4) + B(x-7)$. Ez akkor áll fenn minden x-re, ha $A = \frac{1}{7}$ és $B = -\frac{1}{7}$. Így

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + x - 12}\, \mathrm{d}x &= \int \left(3 + \frac{2x+1}{x^2 + x - 12} + \frac{15}{7}\frac{1}{x-3} - \frac{15}{7}\frac{1}{x+4}\right) \mathrm{d}x \\ &= 3x + \ln(x^2 + x - 12) + \frac{15}{7}\ln(x-3) - \frac{15}{7}\ln(x+4) + c \end{aligned}$$

8. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \left(3\sqrt{x} + xe^{2x^2+1}\right) \mathrm{d}x$$

határozott integrált.

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(3\sqrt{x} + xe^{2x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \left[3\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{4}e^{2x^2+1}\right]_0^1 = 2 + e^3/4 - (0 + e/4) = 2 + (e^3 - e)/4.$$

9. Mekkora az $f(x) = x^3$ függvény $0 \leq x \leq \sqrt[4]{7}$ darabjának x tengely körüli megforgatásával keletkező felület felszíne?

Megoldás: A felszín a tanult képlet alapján

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\sqrt[4]{7}} x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, \mathrm{d}x &= 2\pi \int_0^{\sqrt[4]{7}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt[4]{7}} \\ &= \pi \left[\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{27}\right]_0^{\sqrt[4]{7}} \\ &= \pi \frac{64^{3/2} - 1}{27} \\ &= \frac{511\pi}{27}. \end{aligned}$$

Minden feladat 7 pontos. A sikeres vizsgához az utolsó három feladatból legalább 6 pontot el kell érni.