Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2016. jan. 6.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált. Segítség: alkalmazzuk a parciális integrálás formuláját.

Megoldás:

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{-3x}}{-3} - \int 1\frac{e^{-3x}}{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x-7}{(x^2-7x-9)^3}\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrált. Az eredményként kapott tagokat nem kell egyszerűsíteni és összevonni.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2x-7}{(x^2-7x-9)^3}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{1}{2(x^2-7x-9)^2}\right]_1^8\\ &= \frac{3}{5}8^{5/3} - \frac{1}{2(8^2-7\cdot 8-9)^2} - \frac{3}{5}1^{5/3} + \frac{1}{2(1^2-7\cdot 1-9)^2}\\ &= \frac{3}{5}\cdot 32 - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{450}\\ &= \frac{4073}{225}\end{aligned}$$

3. Egy téli napon a külső hőmérséklet a $h_k(t) = 5\sin\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)$ °C függvény szerint alakul t órakor. A lakás belső hőmérséklete $h_b(t) = 20\,$°C állandó. A lakásból távozó hőteljesítmény a külső és belső hőmérséklet különbségével arányos, az arányossági tényező $\kappa = 100\,\mathrm{W}/$°C. Számítsuk ki a 9 és 21 óra között a lakásból távozott hő mennyiségét, amelynek Wh-ban kifejezett értéke éppen a $t = 9$ és $t = 21$ között a $h_b(t)$ és $h_k(t)$ függvények grafikonja közé eső terület κ-szorosa.

Megoldás: A $t = 9$ és $t = 21$ között a $h_b(t)$ és $h_k(t)$ függvények grafikonja közé eső terület

$$\begin{aligned}\int_9^{21}\left(20 - 5\sin\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)\right)\mathrm{d}t &= \left[20t + \frac{5\cdot 12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi(t-9)}{12}\right)\right]_9^{21}\\ &= 420 + \frac{60}{\pi}\cos\pi - 180 - \frac{60}{\pi}\cos 0\\ &= 240 - \frac{120}{\pi}\end{aligned}$$

Azaz a lakásból távozott hőmennyiség $100(240 - \frac{120}{\pi})\,\mathrm{Wh} \simeq 20,2\,\mathrm{kWh}$.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1\\ -5 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2\\ 5 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6\\ -7\\ 2\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

mátrixokat. Ezek közül az összes lehetséges módon válasszunk ki két különbözőt, és szorozzuk össze őket egymással, ha lehet. Amelyik mátrixnak van determinánsa, azt is határozzuk meg.

Megoldás:

$$AB = \begin{pmatrix} 31 & -3\\ -29 & 19\\ 16 & 4\end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} -18\\ -24\\ -13\end{pmatrix} \qquad BD = \begin{pmatrix} 12 & -16\\ 15 & -6\\ -9 & 18\end{pmatrix}$$

Az $AD, BA, BC, CA, CB, CD, DA, DB, DC$ szorzatok nem értelmezettek. Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa, ezért $\det A = 29, \det D = 12$.

5. Tekintsük az $\underline{u}_1 = (1, -2, 2)$ és $\underline{u}_2 = (2, 2, 1)$ egymásra merőleges vektorokat és a $\underline{v} = (9, 9, 9)$ vektort. Legyen $\underline{v}_1$ a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos, $\underline{v}_2$ pedig az $\underline{u}_1$-re merőleges komponense. Legyen továbbá $\underline{v}_3$ a $\underline{v}$ vektornak az $\underline{u}_2$-vel párhuzamos, $\underline{v}_4$ pedig az $\underline{u}_2$-re merőleges komponense. Számítsuk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorokat, majd ellenőrizzük, hogy $\underline{v}_1 - \underline{v}_4$ merőleges az $\underline{u}_1$ és az $\underline{u}_2$ vektorra is.

   Megoldás: A párhuzamos és merőleges komponensekre bontás képletét alkalmazva

$$\underline{v}_1 = (1, -2, 2), \qquad \underline{v}_2 = (8, 11, 7), \qquad \underline{v}_3 = (10, 10, 5), \qquad \underline{v}_4 = (-1, -1, 4).$$

   Továbbá $\underline{v}_1 - \underline{v}_4 = (2, -1, -2)$, amelynek $\underline{u}_1$-gyel és $\underline{u}_2$-vel vett skaláris szorzata 0.

6. Mennyi az

$$a_n = \frac{(3n^5 - 2^n)^2}{2n + 4^{n+1}}$$

   sorozat határértéke?

   Megoldás:

$$a_n = \frac{(3n^5 - 2^n)^2}{2n + 4^{n+1}} = \frac{4^n(\frac{3n^5}{2^n} - 1)^2}{4^n(\frac{2n}{4^n} + 4)} \to \frac{1}{4}.$$

Elméleti feladatok

7. Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

   lineáris egyenletrendszert, ahol x és y az ismeretlenek. Hány megoldása lehet az egyenletrendszernek? Adjuk meg az összes lehetséges megoldásszámot. Mi annak a feltétele, hogy pontosan egy megoldás legyen? Adjunk példát arra az esetre, amikor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, és a példában ellenőrizzük ennek a feltételét.

   Megoldás: A megoldások száma $0, 1$ vagy végtelen sok lehet. Pontosan egy megoldás akkor van, ha az $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ együtthatómátrix determinánsa nem 0. Egy példa az

$$\begin{aligned} 1x + 0y &= 2 \\ 0x + 1y &= 3 \end{aligned}$$

   egyenletrendszer, ahol $\det A = 1 \neq 0$, a megoldás pedig $x = 2, y = 3$.

8. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt (az egyszeres deriváltakra vonatkozó változatát). Az alábbi két határérték közül melyik esetben alkalmazható? Ha alkalmazható, használjuk, ha nem, melyik feltétel sérül? Számítsuk is ki a határértékeket.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

   Megoldás: Ld. jegyzet. Az első $x \to 0+$ határértékre nem alkalmazható a L'Hospital-szabály, mert $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ és $\lim_{x\to 0+} x = 0$, de ebből látszik, hogy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

   A másik $x \to \infty$ esetben a számláló és a nevező is végtelenhez tart, ezért a L'Hospital-szabály alkalmazható, ezért

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

9. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt. Számoljuk ki a segítségével az alábbi határozott integrált. Adjuk meg az összes primitív függvényt ebben az esetben.

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos 2x + 4x^2\right) \mathrm{d}x.$$

   Megoldás: Ld. jegyzet. Az összes primitív függvény $\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{4x^3}{3} + c$ alakban írható, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezért

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos 2x + 4x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{4x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\sin 0 + \frac{4(\pi/2)^3}{3} - \frac{1}{2}\sin \pi - 0 = \frac{\pi^3}{6}.$$

Minden feladat 7 pontos.