Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2016. jan. 13.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az
$$\int \frac{4x-10}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

   Megoldás: A nevezőt teljes négyzetté kiegészítve kapjuk, hogy $x^2-6x+10=(x-3)^2+1$. A nevező deriváltja pedig $2x-6$, ezért
$$\int \frac{4x-10}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4x-12}{x^2-6x+10}+\frac{2}{(x-3)^2+1}\right)\mathrm{d}x = 2\ln(x^2-6x+10)+2\operatorname{arctg}(x-3)+c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sin^5 x\cos x\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

   Megoldás:
$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sin^5 x\cos x\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{3/4}}{3/4}+\frac{\sin^6 x}{6}\right]_{\pi/2}^{\pi}\\ &= \frac{4}{3}\pi^{3/4}+\frac{\sin^6\pi}{6}-\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/4}-\frac{\sin^6(\pi/2)}{6}\\ &= \frac{4}{3}\pi^{3/4}\left(1-\frac{1}{2^{3/4}}\right)-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

3. Tekintsük az $x^2+y^2/3=1$ egyenletű ellipszist. Integrálással számítsuk ki annak az ellipszoidnak a térfogatát, amelyet az ellipszis x tengely körüli megforgatásával kapunk.

   Megoldás: Az ellipszis egyenletéből az y-t kifejezve kapjuk az $f(x)=\sqrt{3-3x^2}$ függvényt, amelyet az x tengely körül megforgatunk. Mival a függvény a $[-1,1]$-en értelmezett, a keresett térfogat
$$\pi\int_{-1}^{1}\left(3-3x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left[3x-x^3\right]_{-1}^{1}=\pi(3-1+3-1)=4\pi.$$

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\begin{cases} x=t+10\\ y=-3t-1\\ z=2t+2\end{cases} \qquad \text{és} \qquad \begin{cases} x=5t-7\\ y=4t-7\\ z=-t+p\end{cases}$$
egyeneseket a térben, ahol $p\in\mathbb{R}$ paraméter. Hogyan kell p értékét úgy megválasztani, hogy a két egyenesnek legyen metszéspontja? Adjuk meg a metszéspont koordinátáit.

   Megoldás: Az első egyenes egyenletrendszerében a t változót s-nek jelölve keressük a két egyenes metszéspontját, azaz az olyan (s,t) számpárokat, hogy az első egyenes s-hez tartozó pontja koordinátánként megegyezik a második egyenes t-hez tartozó pontjával, vagyis fennáll az alábbi három egyenlőség:
$$\begin{aligned} s+10&=5t-7\\ -3s-1&=4t-7\\ 2s+2&=-t+p\end{aligned}$$
Az első két egyenlet megoldása $s=-2, t=3$. Akkor teljesül a harmadik egyenlet is, ha $p=1$. Ekkor a metszéspont koordinátái $(8,5,-2)$.

5. A síkban két tengelyes tükrözés egymás után alkalmazva megegyezik azzal az elforgatással, amelynek középpontja a tengelyek metszéspontja, szöge pedig a tengelyek által bezárt szög kétszerese. Ellenőrizzük ezt a tényt a következő esetben. Legyen A az $\mathbb{R}^2$ sík $y=x$ egyenesére való tükrözés mátrixa, B az y tengelyre való tükrözésé, C pedig az origó körüli $+90°$-kal való (óramutató járásával ellentétes irányú) forgatás mátrixa. Tetszőleges $\underline{v}\in\mathbb{R}^2$ vektorra az A-nak majd a B-nek megfelelő tükrözést alkalmazva a

$BA\underline{v}$ vektorhoz jutunk, a C-nek megfelelő elforgatás a $\underline{v}$ vektort $C\underline{v}$-be viszi, tehát a fenti állítás ebben az esetben a $BA = C$ egyenlőséget jelenti. Írjuk fel az A, B, C mátrixokat, és ellenőrizzük, hogy $BA = C$ valóban fennáll.

Megoldás: Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázisvektorok képeit meghatározva és a mátrix megfelelő oszlopaiba beírva kapjuk, hogy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

továbbá $BA = C$ mátrixszorzással ellenőrizhető.

6. Mekkorák a befogói annak a derékszögű háromszögnek, amely minimális területű azon háromszögek közül, amelyeket egy $(5, 3)$ ponton átmenő egyenes és a koordinátatengelyek pozitív oldalai határolnak?

   Megoldás: Az egyenes m meredekségét paraméternek választva számolunk. Az $(5, 3)$ ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete $y - 3 = m(x - 5)$, az x tengelyt a $5 - 3/m$, az y tengelyt pedig az $3 - 5m$ pontban metszi. A minimalizálandó függvény a háromszög területe, azaz az

$$f(m) = \frac{\left(5 - \frac{3}{m}\right)(3 - 5m)}{2} = 15 - \frac{9}{2m} - \frac{25m}{2}$$

   Az

$$f'(m) = \frac{9}{2m^2} - \frac{25}{2} = 0$$

   egyenlet megoldása $m = \pm 3/5$, amelyek közül a feladatnak a negatív felel meg. A befogók hossza tehát 10 és 6.

Elméleti feladatok

7. (a) Írjuk fel általában, hogyan kell egy 3×3-as determinánst a második sora szerint kifejteni.
   (b) Az alábbi mátrix néhány eleme nem olvasható. Igazoljuk, hogy a determinánsa a *-gal jelölt elemek ismerete nélkül is meghatározható. Számoljuk ki a determinánst.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & * \\ 1 & 4 & -2 & * \\ -5 & 2 & 1 & * \end{pmatrix}$$

   Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet és képletgyűjtemény.
   (b) A mátrix determinánsát az első sor szerint kifejtve az első három tag 0-val szorzódik, ezért

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & * \\ 1 & 4 & -2 & * \\ -5 & 2 & 1 & * \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

8. Egy a_n sorozat esetén legyen $b_n = a_{2n}$ a sorozat minden páros indexű eleméből képzett részsorozat, $c_n = a_{2n-1}$ pedig a páratlan indexű elemekből képzett részsorozat. Tudjuk, hogy a b_n és a c_n sorozat is konvergens. Mitől függ, hogy ekkora az a_n sorozat is konvergens-e vagy nem? Adjunk olyan példát, amikor b_n és c_n konvergens és a_n is az, ill. egy olyan példát, amikor b_n és c_n konvergens de a_n nem.

   Megoldás: Az a_n sorozat pontosan akkor lesz konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Például az $a_n = 1/n$ esetben maga a_n, $b_n = 1/(2n)$ és $c_n = 1/(2n-1)$ is konvergens. Például ha $b_n = 1/n$ és $c_n = 1$, akkor a_n nem konvergens.

9. Definiáljuk egy $f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltját. A definíció alapján számítsuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját az $x_0 = 0$ pontban. Segítség: használjuk a nevezetes határértékeket.

   Megoldás: Ld. jegyzet. A 0-beli derivált

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

   ahol az utolsó egyenlőség nevezetes határérték.

Minden feladat 7 pontos.