Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2016. jan. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$$
integrálban végezzük el az $u = \sqrt{x+2}$ helyettesítést, majd határozzuk meg az integrált, és az eredményt fejezzük ki az x változóval.

   Megoldás: Az $u = \sqrt{x+2}$ helyettesítésnél x-et kifejezve kapjuk, hogy $x = u^2 - 2$, ezért $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$, így
$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3(u^2-2)-5}{u} 2u\,\mathrm{d}u = \int \left(6u^2 - 22\right)\mathrm{d}u = 2u^3 - 22u + c = (2x-18)\sqrt{x+2} + c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \left(\sqrt[7]{x^{33}} + (6x+5)e^{3x^2+5x-1}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

   Megoldás:
$$\int_0^1 \left(\sqrt[7]{x^{33}} + (6x+5)e^{3x^2+5x-1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{40/7}}{40/7} + e^{3x^2+5x-1}\right]_0^1 = \frac{7}{40} + e^7 - e^{-1}.$$

3. Integrálással számoljuk ki annak a háromszögnek a tömegközéppontját, amelyet a koordinátatengelyek és az $x + y = 1$ egyenes határolnak.

   Megoldás: A képletgyűjteményben szereplő formulát alkalmazzuk az $f(x) = 1 - x$ függvényre az $[a, b] = [0, 1]$ intervallumon.
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$
   Ezért a tömegközéppont koordinátái $(1/3, 1/3)$.

Számítási feladatok

4. Adottak az $\mathbb{R}^3$ vektortérben a $(3, -2, 4)$, $(5, -1, 2)$ és $(1, 2, p)$ vektorok, ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter. A p mely értékei esetén alkot bázist a három adott vektor, és mely értékek esetén nem alkot bázist?

   Megoldás: Az adott vektorok pontosan akkor alkotnak bázist, ha a három vektorból képzett determináns nem nulla. Ezt kiszámítva
$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & p \end{pmatrix} = 28 + 7p$$
adódik, ami pontosan $p = -4$ esetén lesz nulla, azaz ekkor nem alkotnak bázist az adott vektorok, ha pedig $p \neq -4$, akkor bázist alkotnak.

5. Adott a térben az $5x - 4y + 3z = 1$ sík és az
$$\begin{cases} x = -3t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -3 \end{cases}$$
egyenes. Keressük meg a metszéspontjukat. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy a metszésponton, és amely merőleges az adott síkra.

   Megoldás: A metszéspont meghatározásához a sík egyenletébe beírjuk az egyenes egyenletrendszerében szereplő t-től függő kifejezéseket. Így az $5(-3t-1) - 4(2t+2) + 3(-3) = 1$ egyenlet adódik, amit rendezve

$-23t-22=1$-et kapunk, azaz $t=-1$. A metszéspont koordinátái $(2,0,-3)$. A keresett egyenes átmegy ezen a ponton, merőleges az adott síkra, ezért az egyenes irányvektora megegyezik a sík normálvektorával, ami $(5,-4,3)$. A keresett egyenes egyenletrendszere tehát

$$\begin{cases} x = 5t+2 \\ y = -4t \\ z = 3t-3 \end{cases}$$

6. Mennyi az
$$a_n = \frac{6^{n+1}-2n^2}{3+5n^3-n!}$$
sorozat határértéke?

Megoldás: A legnagyobb nagyságrendű tagot kiemelve a számlálóból és a nevezőből azt kapjuk, hogy
$$a_n = \frac{6^{n+1}-2n^2}{3+5n^3-n!} = \frac{6^{n+1}}{n!}\,\frac{1-\frac{2n^2}{6^{n+1}}}{\frac{3}{n!}+\frac{5n^3}{n!}-1} \to 0,$$
mert a $6^{n+1}/n! \to 0$, a második tört pedig -1-hez tart.

Elméleti feladatok

7. Mondjuk ki a rendőrelvet függvények adott x_0 pontbeli határértékére. Az $x \in [0,\pi/2)$ esetén fennálló
$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$$
egyenlőtlenség ismeretében alkalmazzuk a rendőrelvet, és igazoljuk, hogy
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Megoldás: Ld. jegyzet. A megadott egyenlőtlenséget $\sin x$-szel osztva kapjuk, hogy
$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x},$$
ahol $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ miatt a jobb és bal oldalon álló kifejezés határértéke is 1 amint $x \to 0$, ezért a rendőrelv miatt $x/\sin x$ határértéke is 1.

8. Ha az $f(x)$ függvény differenciálható az (a,b) intervallumon, és (a,b)-n szigorúan monoton csökkenő, akkor ebből milyen feltétel következik a deriváltjára? Ha az $f(x)$ az (a,b)-n differenciálható függvény, akkor adjunk olyan feltételt a deriváltjára, amelyből az következik, hogy $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő (a,b)-n. Az $f(x) = -x^3$ függvény példája mit mutat ezeknek a deriváltra vonatkozó feltételeknek a viszonyáról?

Megoldás: Ha $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő (a,b)-n, akkor $f'(x) \le 0$ az (a,b)-n. Ha pedig $f'(x) < 0$ az (a,b)-n, akkor ebből következik, hogy $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő az (a,b). Az $f(x) = -x^3$ függvény szigorúan monoton csökkenő a teljes $\mathbb{R}$-en, de a deriváltja 0-ban $f'(0) = 0$, azaz a csökkenésből nem következik, hogy a derivált szigorúan negatív legyen.

9. Az $[a,b]$ intervallumon folytonos (és korlátos) $f(x)$ függvény és $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ felosztás esetén mit értünk a függvény alsó és felső integrálközelítő összegén? Az $f(x) = x^2$ függvény és az $[a,b] = [0,3]$ intervallum $P = \{0,1,2,3\}$ felosztása esetén számoljuk ki az alsó és felső integrálközelítő összeget, és hasonlítsuk össze az $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integrál értékével.

Megoldás: Ld. jegyzet. Az $f(x) = x^2$-hez tartozó felső integrálközelítő összeg egyenlő $1(1-0)+4(2-1)+9(3-2) = 14$, az alsó integrálközelítő összeg pedig $0(1-0)+1(2-1)+4(3-2) = 5$, a függvény integrálja pedig $\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = [x^3/3]_0^3 = 9$, ami a két közelítőösszeg közé esik.

Minden feladat 7 pontos.