Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2016. jan. 27.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az
$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: alkalmazzunk paricális integrálást.
Megoldás:
$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sqrt[5]{x^{-2}} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.
Megoldás:
$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sqrt[5]{x^{-2}} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{3/5}}{3/5} + \ln \sin x \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{5}{3} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^{3/5} \right) + \ln \sin \frac{\pi}{2} - \ln \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{5}{3} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5} - \left(\frac{\pi}{6}\right)^{3/5} \right) + \ln 2\end{aligned}$$

3. Igazoljuk, hogy az $y = x + 5$ egyenes ugyanakkora területet zár közre az $f(x) = (x + 2)^2 + 3$ és a $g(x) = \sqrt{x + 2} + 3$ függvény grafikonjával is. Ezeket a területeket számoljuk ki integrálással.
Megoldás: Az $f(x) = (x + 2)^2 + 3$ grafikonja és az $y = x + 5$ egyenes metszéspontjait az $f(x) = x + 5$, azaz $(x + 2)^2 + 3 = x + 5$ egyenletből kapjuk, melynek megoldásai $x = -2$ és $x = -1$. Ezért a keresett terület
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \left((x + 2)^2 + 3 - (x + 5)\right) \mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 - \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) \\ &= \frac{-2 + 9 - 12 + 16 - 36 + 24}{6} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszert.
$$\begin{aligned} 3x + 13y - 6z &= 13 \\ 2x + 9y - 5z &= 8 \\ x + 2y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

5. Adottak a $2x - 4y + 3z = 9$ és az $5x + 4y + 2z = -4$ egyenletű síkok. Ellenőrizzük, hogy ezek merőlegesek egymásra. Írjuk fel a metszésvonaluk irányvektorát. Segítség: a keresett vektor merőleges mindkét sík normálvektorára.

6. Vizsgáljuk meg az
$$f(x) = \frac{2x^2 + 6}{x + 1}$$
függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Számítsuk ki a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélein, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell 2×2-es mátrixokat összeszorozni, majd adjuk meg ennek a műveletnek a tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egység létezése, inverz).

8. Tegyük fel, hogy a_n és b_n két korlátos és monoton sorozat. Korlátos-e ekkor az összegük? Monoton-e az összegük? Konvergens-e az összegük? Az összegre vonatkozó tulajdonságokat külön-külön igazoljunk (esetleg tanult tételekre hivatkozva), vagy adjunk rájuk ellenpéldát.

9. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények egy x_0 pontban (legalább) másodrendben érintik egymást? Legyen $f(x) = \cos x$ és $g(x) = c + \sqrt{r^2 - x^2}$, ahol c és r két valós paraméter. A $g(x)$ függvény grafikonja ekkor a $(0, c)$ középpontú r sugarú kör felső íve. Hogyan kell a c és r paramétereket úgy megválasztani, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $x_0 = 0$ pontban másodrendben érintsék egymást, azaz mi az $f(x)$ függvény simulóköre az $x_0 = 0$-ban?

Minden feladat 7 pontos.