Név:	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	$\sum$	jegy
Neptun-kód:														

Matematika EP1 vizsga, 2015. jún. 2.

I. rész: Számítási feladatok

1. Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{2/x} & \text{ha } x > 0 \\ b & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen.

2. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = 2\sin x - x$$

függvényt: keressük meg a lokális szélsőértékeit és inflexiós pontjait, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

3. Adott az $x(t) = R\cos t$ és $y(t) = R\sin t$ ahol $t \in [0, \pi]$ félkörvonal paraméteres egyenlete. Számítsuk ki integrálással a görbe x tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszínét.

4. Tekintsük az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Kifejtés segítségével vezessük vissza $\det(A)$ kiszámítását 2×2-es mátrixok determinánsaira, majd adjuk meg $\det(A)$ értékét. Írjuk le, melyik sorok vagy oszlopok szerint fejtettünk ki.

5. Adottak az $\underline{u}_1 = (1, 0, 1)$ és $\underline{u}_2 = (-2, 0, 2)$ vektorok. Ellenőrizzük, hogy ezek merőlegesek egymásra. Egészítsük ki ezt egy $\underline{u}_3$ vektorral az $\mathbb{R}^3$ vektortér ún. ortogonális bázisává, azaz egy olyan vektorrendszerré, amelyben minden vektor merőleges a másik kettőre. Egy megoldási lehetőség: tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektort bontsunk fel $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges komponenst bontsunk tovább $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk egy sorozat határértékét. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

sorozat konvergens. Mi a határértéke?

7. Mit jelent az, hogy az f függvény konvex az (a, b) intervallumon? Ha f konvex (a, b)-n és kétszer differenciálható, akkor mit mondhatunk az $f''(x)$ függvényről (a, b)-n? Ellenőrizzük ezt az $f(x) = x^4$ függvényre.

8. Adjuk meg a határozott integrálra vonatkozó parciális integrálás formuláját. Ennek segítségével számítsuk ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

9. Milyen tulajdonságokkal definiáljuk a két $\mathbb{R}^3$-beli vektor vektoriális szorzatát? Milyen geometriai jelentés kapcsolható ehhez? Az $\underline{a} = (3, -1, 2)$ és $\underline{b} = (4, 0, 1)$ vektorok esetén számoljuk ki az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzatot, majd ellenőrizzük a merőlegességi feltételt.

10. Mit jelent az, hogy egy V vektortérben vektorok egy W részhalmaza alteret alkot? Tekintsük a legfeljebb negyedfokú valós polinomok V vektorterét. Alteret alkot-e az a W_1 részhalmaz, amely azokból a polinomokból áll, melyeknek a 2 helyen felvett értéke 0? És az a W_2 részhalmaz, amely azokat a polinomokat tartalmazza, amelyekben a négyzetes tag együtthatója -1?

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.