

Matematika EP1 vizsga, 2015. jún. 11.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az

$$a_n = \sqrt{n} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

sorozat határértékét.

2. Írjuk fel az

$$f(x) = 2 \cos^2 x - 1$$

függvény $x_0 = \pi/4$ -beli érintőegyenésének és az arra merőleges az érintési ponton átmenő egyenesnek az egyenletét.

3. Az $x = -\pi$ és $x = \pi$ közötti sávban mekkora az $y = \cos x$ függvény grafikonja és az $y = 1/2$ egyenes közé eső teljes terület? Figyelem, ez a terület több darabból áll attól függően, hogy a $\cos x$ és az $1/2$ közül melyik a nagyobb. Érdemes ábrát készíteni és a darabok területét külön-külön meghatározni.

4. Tekintsük az

$$\begin{aligned} x - 3y - 4z &= 2 \\ 5x + 2z &= 4 \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert. A megoldást a következőképpen határozzuk meg. Először számítsuk ki az együtthatómátrix inverzét, majd ezt szorozzuk össze az egyenletek jobb oldalából alkotott oszlopektorral. Az eredeti egyenletekbe visszahelyettesítve ellenőrizzük, hogy az így kapott vektor komponensei az x, y, z ismeretlenek helyére írva megoldják az eredeti egyenletrendszert.

5. Adott a térben az alábbi két kitérő egyenes.

$$e_1 : \begin{cases} x = 3s + 5 \\ y = -2s \\ z = s - 3 \end{cases} \quad e_2 : \begin{cases} x = -4t + 3 \\ y = -2t - 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az e_1 egyenest és párhuzamos az e_2 egyenessel.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Vizsgáljuk a sorozatok monotonitásának ill. konvergenciájának kapcsolatát. Következik-e az egyik a másiktól? Vizsgáljuk meg mindkét irányt. Ha igen, indokoljunk, ha nem, a tanultak alapján adjunk ellenpéldát vagy olyan további feltételt, amely mellett már következtethetünk a másik tulajdonság teljesülésére.

7. Ismertessük a folytonos függvényekkel végezhető alpműveletekre vonatkozó állítást. Adjunk példát arra, hogy két nem folytonos függvény összege is lehet folytonos. Adjunk továbbá példát olyan $f(x)$ függvényre, amelyet a

$$g(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{ha } x \geq 0 \\ \cos 3x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

0-ban nem folytonos függvénnyel megszorozva az eredmény folytonos lesz.

8. Mi egy $f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltjának definíciója? Számítsuk ki a az $f(x) = x$ függvény x_0 -beli deriváltját a definíció szerint.

9. Hogyan értelmezzük az improprius integrált korlátos integrandus és végtelen intervallum esetén? Mutassuk be az

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx$$

példán, hogyan kell kiszámolni.

10. Definiáljuk, hogyan kell mátrixokat egymással összeszorozni. Adjunk olyan példát legalább 2×2 -es nem feltétlenül négyzetes mátrixokra, amelyek nem tartalmaznak 0 elemet, és amelyekeken kiszámoljuk a két mátrix szorzatát. Adjunk példát olyan A és B legalább 2×2 -es nem feltétlenül négyzetes mátrixokra, hogy az AB mátrixszorzat létezik, de a BA szorzat nem értelmezett. (Az utóbbi esetben nem kell kiszámolni az AB szorzatot.)

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.