

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2016. dec. 21.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 9}{x^2 + 3x - 4} dx$$

határozatlan integrált.

2. Mennyi az

$$\int_{\pi}^{2\pi} (x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3 \sin^2 x \cos x) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Az idei karácsonyfára csíkos gömböket készítünk. A boltban kapható piros üveg-gömb 6 cm átmérőjű. Ebből az 1–1 cm távolságú párhuzamos síkokkal kimetszett rétegek közül minden másodiknak a felszínét csillámporral fedjük be. Integrálás-sal számoljuk ki az egyes rétegekhez szükséges csillámpor mennyiségét, ami a fe-lületdarab felszínével arányos. Másképpen mekkora felszín jut az $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottjára a $[-3, -2]$, $[-1, 0]$ és $[1, 2]$ intervallumokon?



Számítási feladatok

4. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 3t + 1 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenes és az $x - 4y - 8z = 3$ sík párhuzamos a térben. Számoljuk ki a távolságukat. Segítség: válasszuk ki az egyenes egy tetszőleges pontját.

5. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = xe^{2x} - 7x + 1$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.
6. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = x(x - 3)^2$$

függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Számítsuk ki a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélein, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorok bázist alkotnak az \mathbb{R}^3 vektortérben. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektort állítsuk elő a fenti báziselemek lineáris kombinációjaként, azaz találjuk meg azokat az $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstansokat, amelyekkel $a\underline{u}_1 + b\underline{u}_2 + c\underline{u}_3 = \underline{v}$. Segítség: az előbbi vektoregyenletet koordinátánként kiírva lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlen a, b, c konstansokra.

8. (a) Konvergens-e az $a_n = (-1)^n$ sorozat?
(b) Konvergens b_n sorozat esetén lehet-e az $a_n + b_n$ sorozat konvergens ill. divergens?
(c) Tetszőleges c_n sorozat esetén lehet-e az $a_n + c_n$ sorozat konvergens ill. divergens?

A (b) és (c) részben ha mindkét lehetőség előfordulhat, adjunk egy-egy példát, ha csak az egyik, akkor indokoljunk.

9. Írjuk fel a parciális integrálás formuláját a határozatlan integrálás esetére. Melyik deriválási szabályból következik? Alkalmazzuk a formulát az

$$\int x \cos 3x dx$$

integrál kiszámításához.

Minden feladat 7 pontos.