Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2017. jan. 18.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_1^2 \left(\frac{x}{x^3\sqrt{x}} - 2\pi x\sin\left(\pi x^2 - 3\pi\right)\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. A koordinátarendszer $(0,2)$ és $(1,3)$ pontjait összekötő szakaszt az x tengely körül megforgatva egy csonka kúp palástját kapjuk. Integrálással számítsuk ki ennek a csonka kúpnak a térfogatát. Segítség: először írjuk fel az adott pontokra illeszkedő egyenes egyenletét.

Számítási feladatok

4. (a) A síkban jelölje e a $3x-4y=7$ egyenest. Bontsuk fel az $\underline{u} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektort az $\underline{u}_e$ e-vel párhuzamos és az $\underline{u}_n$ e-re merőleges vektorok összegére. Segítség: ha $\underline{n}$ jelöli az e egyenes normálvektorát, akkor $\underline{u}_n$ párhuzamos $\underline{n}$-nel, $\underline{u}_e$ pedig merőleges $\underline{n}$-re.

   (b) Ugyanezt elvégezve az $\underline{u}$ helyett a $\underline{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektorral számítsuk ki a $\underline{v}_e$ e-vel párhuzamos és a $\underline{v}_n$ e-re merőleges vektorokat.

   (c) Az $\underline{u}_e$ és $\underline{v}_e$ vektorokból állítsuk össze az e egyenesre vetítés A mátrixát.

5. Vizsgáljuk meg az
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát. Készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő a függvény, hol konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Vázoljuk a függvény grafikonját.

6. Számoljuk ki az
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
impróprius integrál értékét. Segítség: az integrandus az $x = 1/2$ pont közelében nem korlátos.

Elméleti feladatok

7. Az
$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$
mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell 2×2-es mátrixokat összeszorozni. Írjuk le a 2×2-es mátrixok szorzásának tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egység, inverz), majd ellenőrizzük a kommutativitást a fenti A és B mátrixok példáján.

8. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, és mit nevezünk a függvény differenciálhányadosának ebben a pontban? A definíció alapján számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvény deriváltját az x_0 pontban.

9. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az x_0 pontban másodrendben érintik egymást? Mi az $f(x)$ függvény x_0 pontjához húzott simulókör definíciója? (A simulókör sugarának képletét nem kell megadni.) Az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 0$ ponthoz húzott simulókörét az $s(x) = c - \sqrt{r^2 - x^2}$ alakban keresve számoljuk ki a c és r paraméterek értékét.

Minden feladat 7 pontos.