Matematika EP1 vizsga megoldása, 2016. dec. 21.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az

$$\int \frac{2x^2+2x-9}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+2x-9}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2x^2+6x-8}{x^2+3x-4} + \frac{-4x-6}{x^2+3x-4} + \frac{5}{x^2+3x-4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(2 - 2\frac{2x+3}{x^2+3x-4} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2x - 2\ln|x^2+3x-4| + \ln|x-1| - \ln|x+4| + c\end{aligned}$$

ahol a második egyenlőségnél az

$$\frac{5}{x^2+3x-4} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}$$

parciális törtekre bontást alkalmaztuk.

2. Mennyi az

$$\int_\pi^{2\pi} \left(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3\sin^2 x\cos x\right)\mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \left(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 3\sin^2 x\cos x\right)\mathrm{d}x &= \int_\pi^{2\pi} \left(x^{7/3} - 3\sin^2 x\cos x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{10}x^{10/3} - \sin^3 x\right]_\pi^{2\pi} \\ &= \frac{3}{10}\left((2\pi)^{10/3} - \pi^{10/3}\right).\end{aligned}$$

3. Az idei karácsonyfára csíkos gömböket készítünk. A boltban kapható piros üveggömb 6 cm átmérőjű. Ebből az 1–1 cm távolságú párhuzamos síkokkal kimetszett rétegek közül minden másodiknak a felszínét csillámporral fedjük be. Integrálással számoljuk ki az egyes rétegekhez szükséges csillámpor mennyiségét, ami a felületdarab felszínével arányos. Másképpen mekkora felszín jut az $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottjára a $[-3,-2]$, $[-1,0]$ és $[1,2]$ intervallumokon?

Megoldás: Mivel $f'(x) = -x/\sqrt{9-x^2}$, ezért a forgástest felszínképletét egy tetszőleges $[a,b]$ intervallumokra alkalmazva a felszín

$$2\pi\int_a^b \sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b \sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b 3\,\mathrm{d}x = 6\pi(b-a),$$

azaz a felszín mindhárom kérdezett felületdarabon 6π.

Számítási feladatok

4. Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{cases} x = 4t+4 \\ y = 3t+1 \\ z = 3-t \end{cases}$$

egyenletrendszerű egyenes és az $x - 4y - 8z = 3$ sík párhuzamos a térben. Számoljuk ki a távolságukat. Segítség: válasszuk ki az egyenes egy tetszőleges pontját.

Megoldás: Azt kell ellenőrizni, hogy az egyenes $(4,3,-1)$ irányvektora merőleges a sík $(1,-4,-8)$ normálvektorára: $4\cdot 1+3(-4)-1(-8)=0$. Válasszuk az egyenes $(4,1,3)$ pontját. A sík egyenletét $(x-3)-4y-8z=0$ alakba átírva alkalmazható a távolságképlet:

$$\frac{(4-3)-4\cdot 1-8\cdot 3}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}=\frac{-27}{9}=-3,$$

azaz a távolság 3.

5. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0=0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x)=xe^{2x}-7x+1$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

   Megoldás:

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-7$$
$$f''(x)=4e^{2x}+4xe^{2x}$$
$$f'''(x)=12e^{2x}+8xe^{2x}$$

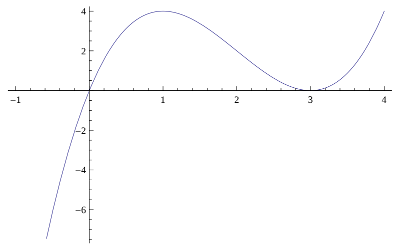
   ezért $f(0)=1$, $f'(0)=-6$, $f''(0)=4$ és $f'''(0)=12$, tehát a Taylor-polinom $1-6x+2x^2+2x^3$.

6. Vizsgáljuk meg az

$$f(x)=x(x-3)^2$$

   függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Számítsuk ki a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélein, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

   Megoldás: Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. Mivel $f'(x)=(x-3)^2+2x(x-3)=(x-3)(3x-3)$ és $f''(x)=3x-3+3(x-3)=6x-12$, ezért a függvény $(-\infty,1]$-en és $[3,\infty)$-en monoton növő, $[1,3]$-on csökkenő, $(-\infty,2]$-n konkáv, $[2,\infty)$-en konvex. Lokális maximum van az 1-ben, lokális minimum a 3-ban, inflexiós pont a 2-ben, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ és $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.



Elméleti feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\underline{u}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\quad \underline{u}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad \underline{u}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

   vektorok bázist alkotnak az $\mathbb{R}^3$ vektortérben. A $\underline{v}=\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$ vektort állítsuk elő a fenti báziselemek lineáris kombinációjaként, azaz találjuk meg azokat az $a,b,c\in\mathbb{R}$ konstansokat, amelyekkel $a\underline{u}_1+b\underline{u}_2+c\underline{u}_3=\underline{v}$. Segítség: az előbbi vektoregyenletet koordinátánként kiírva lineáris egyenletrendszert kapunk az ismeretlen a,b,c konstansokra.

   Megoldás: Mivel a három vektorból mint oszlopokból összeállított mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{vmatrix}=9$$

   nem nulla, a vektorok bázist alkotnak. Az $a\underline{u}_1+b\underline{u}_2+c\underline{u}_3=\underline{v}$ egyenletet koordinátánként kiírva a

$$2b+c=6$$
$$a+2c=5$$
$$2a+b=4$$

   egyenletrendszer adódik, aminek az $a=1,b=2,c=2$ az egyértelmű megoldása.

8. (a) Konvergens-e az $a_n=(-1)^n$ sorozat?

   (b) Konvergens b_n sorozat esetén lehet-e az a_n+b_n sorozat konvergens ill. divergens?

(c) Tetszőleges c_n sorozat esetén lehet-e az $a_n + c_n$ sorozat konvergens ill. divergens?

A (b) és (c) részben ha mindkét lehetőség előfordulhat, adjunk egy-egy példát, ha csak az egyik, akkor indokoljunk.

Megoldás:

(a) a_n nem konvergens, torlódási pontja a -1 és az 1.

(b) $a_n + b_n$ mindig divergens. Ha konvergens lenne, akkor mivel b_n konvergens, ezért következne, hogy a_n is konvergens.

(c) Lehet: $c_n = (-1)^{n+1}$ esetén $a_n + c_n = 0$ minden n-re, tetszőleges konvergens c_n esetén pedig $a_n + c_n$ divergens.

9. Írjuk fel a parciális integrálás formuláját a határozatlan integrálás esetére. Melyik deriválási szabályból következik? Alkalmazzuk a formulát az

$$\int x \cos 3x \, \mathrm{d}x$$

integrál kiszámításához.

Megoldás: Ld. jegyzet. A szorzat deriválási szabályából következik.

$$\int x \cos 3x \, \mathrm{d}x = x\frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3} \, \mathrm{d}x = x\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c.$$

Minden feladat 7 pontos.