Matematika EP1 vizsga megoldása, 2017. jan. 4.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u = \sqrt{2x-3}$ helyettesítést, számoljuk ki a primitív függvényt, majd fejezzük ki az eredményt az x változó segítségével.

   Megoldás: Mivel $u = \sqrt{2x-3}$, ezért $x = (u^2+3)/2$, továbbá $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = u$, így
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{u^2+3}{2}}{u} u\,\mathrm{d}u = \int \frac{u^2+3}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + \frac{3u}{2} + c = \frac{(2x-3)^{3/2}}{6} + \frac{3\sqrt{2x-3}}{2} + c.$$

2. Mennyi az
$$\int_1^e \left(\frac{x^7}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\cdot \ln^3 x\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: Átírva $x^7/(x\sqrt{x}) = x^{11/2}$,
$$\int_1^e \left(\frac{x^7}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\cdot \ln^3 x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{13}x^{13/2} + \frac{\ln^4 x}{4}\right]_1^e = \frac{2}{13}\left(e^{13/2}-1\right) + \frac{1}{4}.$$

3. Számítsuk ki a koordinátarendszerben a $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ pontok által meghatározott háromszög tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: először írjuk fel a $(-1,0)$ és $(1,1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

   Megoldás: A $(-1,0)$ és $(1,1)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = (x+1)/2$, ezért az $f(x) = (x+1)/2$ függvénynek a $[-1,1]$ intervallumon az alábbi integráljaira van szükség:
$$\int_{-1}^1 x\frac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$$
$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = 1$$
amiből a tömegközéppont x koordinátája $\frac{1}{3}$, y koordinátája pedig $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$ síkban az origó körüli $\pi/2$ szöggel való óramutató járásával ellentétes irányú forgatás A mátrixát. Számoljuk ki az A mátrix inverzét. Olvassuk le, hogy az eredményül kapott A^{-1} mátrix milyen lineáris transzformáció mátrixa.

   Megoldás: Mivel a transzformáció az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektort a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektorba, a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektort pedig a $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ vektorba viszi, a transzformáció mátrixa
$$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
lesz. Mivel $\det(A) = 1$, a mátrix inverze megegyezik az adjungált mátrixszal:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$
Az A^{-1}-nek megfelelő lineáris transzformáció $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektort a $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ vektorba, a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektort pedig az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektorba viszi. Ez az origó körüli $\pi/2$ szöggel való óramutató járásával megegyező irányú forgatás.

5. Mennyi az

$$a_n = \sqrt{1+3n^3+n^4} - \sqrt{2+n^4}$$

sorozat határértéke?

Megoldás:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\sqrt{1+3n^3+n^4} - \sqrt{2+n^4}\right) \frac{\sqrt{1+3n^3+n^4} + \sqrt{2+n^4}}{\sqrt{1+3n^3+n^4} + \sqrt{2+n^4}} \\
&= \frac{1+3n^3+n^4-(2+n^4)}{\sqrt{1+3n^3+n^4} + \sqrt{2+n^4}} \\
&= \frac{3n^3-1}{\sqrt{1+3n^3+n^4} + \sqrt{2+n^4}} \\
&= \frac{n^3}{n^2} \frac{3-\frac{2}{n^3}}{\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n}+1} + \sqrt{\frac{2}{n^4}+1}},
\end{aligned}$$

ahol a jobb oldalon álló második tört 3/2-hez tart, ezért a határérték $+\infty$.

6. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{x}$ függvény érintőjének egyenletét abban a pontban, ahol az érintő merőleges az $y + 4x = 3$ egyenesre.

Megoldás: Az $y+4x = 3$ egyenes meredeksége -4, ezért erre merőleges, $\frac{1}{4}$ meredekségű érintőt keresünk. Mivel $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, ezért az $\frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4}$ egyenletet kell megoldani. Ez az $x = 1$ pontban teljesül. Az 1 pontban tehát $f(1) = 1$ és $f'(1) = \frac{1}{4}$, vagyis az érintő egyenlete $y - 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$.

Elméleti feladatok

7. (a) Egy lineáris egyenletrendszerben az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik. Csak az egyenletrendszer együtthatómátrixát ismerve mit mondhatunk a megoldások számáról? Az együtthatómátrixnak milyen tulajdonsága áll összefüggésben a megoldások számával? Adjuk meg ezt az összefüggést.

   (b) Hány megoldása lehet a

$$\begin{aligned}
3x - y + 2z &= * \\
2x + 4y - 2z &= * \\
2x - 3y + 3z &= *
\end{aligned}$$

   egyenletrendszernek, ahol a $*$ helyeken álló számok nem olvashatók?

Megoldás:

(a) Az A együtthatómátrix determinánsától függ a megoldások száma. Ha $\det(A) \neq 0$, akkor pontosan egy megoldás van, ha $\det(A) = 0$, akkor vagy nincs megoldás vagy végtelen sok megoldás van.

(b) Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért vagy nincs megoldás vagy végtelen sok megoldás van.

8. (a) Egy f kétszer differenciálható függvény második deriváltjának milyen tulajdonsága esetén konvex ill. konkáv az f függvény egy (a, b) intervallumon?

   (b) Mit mondhatunk egy f kétszer differenciálható függvény második deriváltjáról, ha f konvex ill. konkáv egy (a, b) intervallumon?

   (c) A fentiek alapján állapítsuk meg, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 4$ függvény mely intervallumokon konvex ill. konkáv.

Megoldás:

(a) Ha $f''(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$, akkor f konvex az (a, b) intervallumon. Ha $f''(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$, akkor f konkáv az (a, b) intervallumon.

(b) Ha f konvex az (a, b) intervallumon, akkor $f''(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$. Ha f konkáv az (a, b) intervallumon, akkor $f''(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$.

(c) Mivel $f''(x) = 6x - 6$, ami $x < 1$ esetén negatív, $x > 1$ esetén pozitív, az adott f függvény a $(-\infty, 1]$-en konkáv, az $[1, \infty)$-en konvex. (1-ben inflexiós pontja van.)

9. Definiáljuk egy f korlátos függvény improprius integrálját a $[0, \infty)$ intervallumon. A definíció alkalmazásával számítsuk ki az

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x$$

értékét.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{(x+1)^{-4}}{-4}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{4(R+1)^4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$