Matematika EP1 vizsga megoldása, 2017. jan. 11.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int 3xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: végezzünk parciális integrálást.

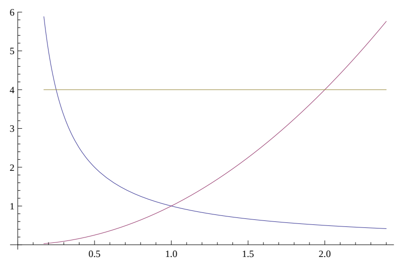
   Megoldás: A parciális integrálást $f(x) = 3x$ és $g'(x) = e^{-2x}$ szereposztásban alkalmazva
$$\int 3xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = 3x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 3\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + c.$$

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: Maradékos polinomosztás után az integrandus
$$\frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 2}{x+1} = x^2 - 4x - 1 + \frac{3}{x+1},$$
ezért
$$\int_0^1 \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + 3\ln|x+1|\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 - 1 + 3\ln 2 - 3\ln 1 = -\frac{8}{3} + 3\ln 2.$$

3. Tekintsük azt a korlátos S síkidomot, amelyet az $y = 1/x$, $y = x^2$ és $y = 4$ görbék határolnak az első síknegyedben. (Az első síknegyed a koordinátarendszer azon a pontjaiból áll, amelyeknek mindkét koordinátája pozitív.) Integrálással számítsuk ki az S síkidom területét. Segítség: ábrázoljuk az adott görbéket, majd S területét két jól választott rész összegeként számoljuk ki.

   Megoldás: Az ábrán látható a három görbe által határolt S síkidom az első síknegyedben. Az $x \in [1/4, 1]$ intervallumon alulról az $y = 1/x$ görbe, felülről az $y = 4$ határolja, az $x \in [1, 2]$ intervallumon pedig alulról az $y = x^2$, felülről pedig az $y = 4$ határolja. Így a teljes terület



$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(4 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[4x - \ln|x|\right]_{\frac{1}{4}}^{1} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= 4 - \ln 1 - \left(1 - \ln\frac{1}{4}\right) + 8 - \frac{8}{3} - \left(4 - \frac{1}{3}\right) \\
&= 7 + \ln\frac{1}{4} - \frac{7}{3} \\
&= \frac{14}{3} - \ln 4.
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. (a) Tekintsük az
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & p \end{pmatrix}$$
mátrixot, ahol p valós paraméter. A p paraméter mely értékeire létezik az A mátrix inverze?

   (b) Számoljuk ki a fenti A mátrix inverzét a $p = 3$ paraméterérték esetén.

   Megoldás:

   (a) A mátrixnak pontosan akkor létezik az inverze, ha a determinánsa nem nulla. Mivel $\det(A) = 9p - 30$, ezért az inverz pontosan akkor létezik, ha $9p - 30 \neq 0$, azaz $p \neq 10/3$.

(b) $p = 3$ esetén

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -5 \\ \frac{17}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{(n-4)(n+1)+3n}{(n+2)(n-1)-n} \right)^{n^2}$$

sorozat határértéke?

Megoldás: A számlálóban és a nevezőben elvégezve a beszorzást

$$a_n = \left(\frac{(n-4)(n+1)+3n}{(n+2)(n-1)-n} \right)^{n^2} = \left(\frac{n^2-4}{n^2-2} \right)^{n^2} = \left(1 - \frac{2}{n^2-2} \right)^{n^2} \to e^{-2}$$

6. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban. Segítség: a $\operatorname{tg} x$ függvény deriváltját érdemes $1 + \operatorname{tg}^2 x$ alakban írni.

Megoldás: Mivel

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x \\ f'(x) &= 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ f''(x) &= 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x \\ f'''(x) &= 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 6 \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x), \end{aligned}$$

ezért $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2$, vagyis a keresett Taylor-polinom $x + \frac{x^3}{3}$.

Elméleti feladatok

7. Adott $\underline{u}$ és $\underline{v}$ háromdimenziós vektorok esetén mik az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságai (irány, állás, hossz)? Az

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

esetben számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot.

Megoldás: Ld. jegyzet. A konkrét esetben

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 28 \end{pmatrix}$$

8. Mondjuk ki a függvények x_0 pontbeli határértékére vonatkozó rendőrelvet. A rendőrelv segítségével számoljuk ki a

$$\lim_{x \to 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

határértéket. Segítség: adjunk alsó és felső becslést a szinuszfüggvényre.

Megoldás: Ld. jegyzet. Mivel a szinuszfüggvény értéke -1 és 1 közé esik, $-1 \le \sin(1/x) \le 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel a becsléssel

$$-x \le x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \le x$$

adódik, ahol a $-x$ alsó és az x felső becslés is 0-hoz tart, ezért a rendőrelv miatt a keresett $\lim_{x \to 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ határérték is 0.

9. Mondjuk ki a Rolle-féle középértéktételt. Az

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$$

függvényre alkalmazható-e a tétel az $[a, b] = [-1, 1]$ intervallumon? A fenti f függvény deriváltjának kiszámításával ellenőrizzük, hogy létezik-e a tétel által garantált tulajdonságú pont.

Megoldás: Ld. jegyzet. Az $f(x)$ az $x = 0$ pontban nem értelmezett, a Rolle-féle középértéktétel nem alkalmazható rá a $[-1, 1]$ intervallumon. Mivel az $f'(x) = -1 - 1/x^2 = 0$ egyenlet az $x^2 = -1$ egyenletre vezet, aminek nincs valós megoldása, ezért az $f'(x)$ derivált semmilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén nem lesz nulla.