Matematika EP1 vizsga megoldása, 2017. jan. 18.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

   Megoldás: A maradékos polinomosztás egy lépésének elvégzésével és a nevező deriváltjának többszörösét leválasztva
$$\frac{x^2}{x^2-4x+5} = \frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+5} + \frac{4x-8}{x^2-4x+5} + \frac{3}{x^2-4x+5}.$$
   Mivel a nevezőnek nincs valós gyöke, teljes négyzetté kiegészítéssel kapjuk, hogy $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, ezért
$$\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = x + 2\ln(x^2-4x+5) + 3\operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

2. Mennyi az
$$\int_1^2 \left(\frac{x}{x^3\sqrt{x}} - 2\pi x \sin\left(\pi x^2 - 3\pi\right)\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás:
$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{x}{x^3\sqrt{x}} - 2\pi x \sin\left(\pi x^2 - 3\pi\right)\right)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{3}x^{-3/2} + \cos(\pi x^2-3\pi)\right]_1^2 \\ &= -\frac{2}{3}2^{-3/2} + \cos\pi - \left(-\frac{2}{3} + \cos(-2\pi)\right) \\ &= -\frac{4}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

3. A koordinátarendszer $(0,2)$ és $(1,3)$ pontjait összekötő szakaszt az x tengely körül megforgatva egy csonka kúp palástját kapjuk. Integrálással számítsuk ki ennek a csonka kúpnak a térfogatát. Segítség: először írjuk fel az adott pontokra illeszkedő egyenes egyenletét.

   Megoldás: A keresett szakaszt az $f(x)=x+2$ függvény adja meg a $[0,1]$ szakaszon, ezért a csonka kúp térfogata
$$\pi\int_0^1 (x+2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^1 = \pi\frac{3^3-2^3}{3} = \frac{19\pi}{3}.$$

Számítási feladatok

4. (a) A síkban jelölje e a $3x-4y=7$ egyenest. Bontsuk fel az $\underline{u}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektort az $\underline{u}_e$ e-vel párhuzamos és az $\underline{u}_n$ e-re merőleges vektorok összegére. Segítség: ha $\underline{n}$ jelöli az e egyenes normálvektorát, akkor $\underline{u}_n$ párhuzamos $\underline{n}$-nel, $\underline{u}_e$ pedig merőleges $\underline{n}$-re.

   (b) Ugyanezt elvégezve az $\underline{u}$ helyett a $\underline{v}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vektorral számítsuk ki a $\underline{v}_e$ e-vel párhuzamos és a $\underline{v}_n$ e-re merőleges vektorokat.

   (c) Az $\underline{u}_e$ és $\underline{v}_e$ vektorokból állítsuk össze az e egyenesre vetítés A mátrixát.

   Megoldás:

   (a) Mivel az egyenes normálvektora $\underline{n}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, ezért
$$\underline{u}_n = \frac{\langle \underline{u},\underline{n}\rangle}{\|\underline{n}\|^2}\underline{n} = \frac{1\cdot 3 + 0(-4)}{3^2+4^2}\underline{n} = \frac{3}{25}\underline{n} = \begin{pmatrix}\frac{9}{25}\\ -\frac{12}{25}\end{pmatrix}, \qquad \underline{u}_e = \underline{u}-\underline{u}_n = \begin{pmatrix}\frac{16}{25}\\ \frac{12}{25}\end{pmatrix}.$$

   (b) Hasonlóan
$$\underline{v}_n = \frac{\langle \underline{v},\underline{n}\rangle}{\|\underline{n}\|^2}\underline{n} = \frac{0\cdot 3 + 1(-4)}{3^2+4^2}\underline{n} = -\frac{4}{25}\underline{n} = \begin{pmatrix}-\frac{12}{25}\\ \frac{16}{25}\end{pmatrix}, \qquad \underline{v}_e = \underline{v}-\underline{v}_n = \begin{pmatrix}\frac{12}{25}\\ \frac{9}{25}\end{pmatrix}.$$

(c) Az e egyenesre vetítés mátrixa

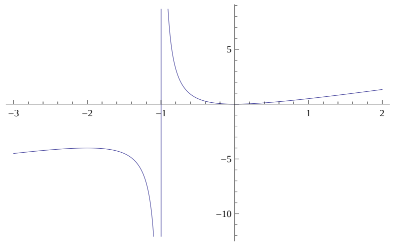
$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}.$$

5. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát. Készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő a függvény, hol konvex ill. konkáv, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Vázoljuk a függvény grafikonját.

Megoldás: Értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, egyszerűsítés után a deriváltak



$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Az első derivált a -2 és 0 pontokban 0, a második derivált sehol. Ezért a táblázat

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
f	$\frown\uparrow$	lok. max.	$\frown\downarrow$	nem ért.	$\smile\downarrow$	lok. min.	$\smile\uparrow$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$

6. Számoljuk ki az

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál értékét. Segítség: az integrandus az $x = 1/2$ pont közelében nem korlátos.

Megoldás:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[-\frac{1}{2(2x-1)}\right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}\right) = \infty$$

Elméleti feladatok

7. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell 2×2-es mátrixokat összeszorozni. Írjuk le a 2×2-es mátrixok szorzásának tulajdonságait (kommutativitás, asszociativitás, egység, inverz), majd ellenőrizzük a kommutativitást a fenti A és B mátrixok példáján.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

8. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, és mit nevezünk a függvény differenciálhányadosának ebben a pontban? A definíció alapján számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvény deriváltját az x_0 pontban.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$$

9. Mit jelent az, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az x_0 pontban másodrendben érintik egymást? Mi az $f(x)$ függvény x_0 pontjához húzott simulókör definíciója? (A simulókör sugarának képletét nem kell megadni.) Az $f(x) = x^2$ függvény $x_0 = 0$ ponthoz húzott simulókörét az $s(x) = c - \sqrt{r^2 - x^2}$ alakban keresve számoljuk ki a c és r paraméterek értékét.

Megoldás: Ld. jegyzet. Mivel $f'(x) = 2x$ és $f''(x) = 2$, ezért $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$. Továbbá egyszerűsítés után

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \qquad s''(x) = \frac{r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}},$$

amibe $x_0 = 0$-t behelyettesítve $s(0) = c - r$, $s'(0) = 0$, $s''(0) = 1/r$. Ezeket f megfelelő deriváltjaival egyenlővé téve adódik, hogy $c = r = 1/2$.