Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2016. jún. 7.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Végezzük el az
$$\int \frac{2x^2 - 2x - 9}{x^2 + x - 6}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_1^e \left(x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Integrálással határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény görbéjének (az ún. láncgörbének) az ívhosszát az $x \in [-2, 2]$ intervallumon. Segítség: használjuk a képletgyűjteményben is szereplő $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ összefüggést.

Számítási feladatok

4. Adott a térben a $2x - (y + 3) - 2z = 0$ egyenletű sík és a vele párhuzamos
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2t - 5 \end{cases}$$
egyenletrendszerű egyenes. Ellenőrizzük, hogy a sík valóban párhuzamos az egyenessel. Határozzuk meg a távolságukat. Segítség: a képletgyűjteményben szereplő formulát alkalmazva számoljuk ki az egyenes egy tetszőleges pontjának távolságát a síktól.

5. Mennyi az
$$a_n = \left(\frac{2n}{2n - 1} \right)^{5-4n}$$
sorozat határértéke?

6. Az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 7$ függvény mely pontjában húzott érintője merőleges az $5y - x = 3$ egyenesre? Írjuk fel az érintő egyenletét is ebben a pontban (pontokban).

Elméleti feladatok

7. Egy lineáris egyenletrendszer jobb oldalán csupa 0-k állnak. Vegyük észre, hogy a Gauss-elimináció tetszőleges lépését elvégezve ez a tulajdonság végig megmarad. Hány megoldása lehet egy ilyen egyenletrendszernek? Az együtthatómátrix milyen tulajdonságától függ a megoldások száma? Tekintsük a
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ -5x + 8y &= 0 \end{aligned}$$
egyenletrendszert. Hány megoldása van? Ellenőrizzük az együtthatómátrixra adott fenti feltételt.

8. (a) Egy x_0 pontban differenciálható $f(x)$ függvény esetén milyen tulajdonságnak (szükséges feltételnek) kell teljesülnie ahhoz, hogy a függvénynek x_0-ban lokális szélsőértéke legyen? Teljesül-e az $f(x) = x^3$ függvényre az $x_0 = 0$ pontban az adott szükséges feltétel? Van-e a függvénynek lokális szélsőértéke $x_0 = 0$-ban?

   (b) Egy x_0 pontban *kétszer* differenciálható $f(x)$ függvény esetén milyen tulajdonság (elégséges feltétel) megléte esetén következik, hogy a függvénynek x_0-ban lokális minimuma van? Teljesül-e az $f(x) = x^4$ függvényre az $x_0 = 0$ pontban az adott elégséges feltétel? Van-e a függvénynek lokális minimuma $x_0 = 0$-ban?

9. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt a határozatlan és a határozott integrál kapcsolatáról. Számoljuk ki a segítségével az
$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$
integrált.

Minden feladat 7 pontos.