Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2017. dec. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{2x^2-4x+9}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Parabolaívekkel határolt 2 cm átmérőjű nyomóforma segítségével habkarikákat készítünk a karácsonyfára. Számítsuk ki egy habkarika térfogatát, amely megkapható a koordinátarendszerben az $f(x) = 3 - x^2$ függvény grafikonja által felülről, a $g(x) = 1 + x^2$ grafikonja által alulról határolt síkidom x tengely körüli megforgatásával kapott forgástestként. Segítség: a keresett forgástest térfogatát úgy számolhatjuk, hogy az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatottjának térfogatából kivonjuk a $g(x)$ függvény megforgatottjának térfogatát. (Ez nem egyenlő az $f(x) - g(x)$ megforgatottjának térfogatával.)

   A kapott térfogat segítségével adjunk nagyságrendi becslést, hogy egy liter habból hány habkarika készíthető. A becslésben π értékét 3-mal, a kapott törtet egy hozzá közeli egész számmal helyettesítsük.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix}10\\1\\18\end{pmatrix}$$
vektorokat, melyek közül $\underline{u}_1$ és $\underline{u}_2$ merőlegesek egymásra. Keressünk olyan $\underline{u}_3$ vektort, amely $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is merőleges. Ekkor az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok automatikusan bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, ezért a fenti $\underline{v}$ vektor felírható a bázis elemeinek lineáris kombinációjaként. Keressük meg ezt a felírást két lépésben. Bontsuk fel először $\underline{v}$-t egy $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos $\underline{v}_p$ és egy rá merőleges $\underline{v}_m$ összetevők összegére. Ezután a $\underline{v}_m$ merőleges összetevőt bontsuk tovább $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Vegyük észre, hogy a merőleges komponens $\underline{u}_3$-mal párhuzamos.

5. A 2 dl térfogatú henger alakú bögrék közül milyen sugár és magasság esetén lesz a börge felszíne a lehető legkisebb? Felszínen a henger palástját és alaplapját értjük együttesen, a bögre falvastagságát és a fülét elhanyagoljuk.

6. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = 1/(x+2)^2$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Elméleti feladatok

7. Legyen
$$A = \begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$$
egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A Gauss-elimináció segítségével hozzuk redukált lépcsős alakra. Első lépésben cseréljük fel a két sort. Írjuk fel, hogyan változik a fenti A mátrix determinánsa az egyes lépések elvégzésekor. Ezek alapján adjuk meg általában, hogy a Gauss-elimináció lehetséges lépései során hogyan változik az együtthatómátrix determinánsa.

8. Mondjuk ki a sorozatok határértékére vonatkozó rendőrelvet. Ennek segítségével adjuk meg az
$$a_n = \frac{\cos(n^2)}{n^2}$$
sorozat határértékét.

9. Tegyük fel, hogy $f(x)$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, amely differenciálható $(0,1)$-en. Tudjuk továbbá, hogy $f(0) = 0$ és $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (0,1)$ esetén. Lehet-e ekkor az $f(1)$ függvényérték pozitív? Lehet-e $f(1) = 0$? Lehet-e $f(1) < 0$? A választ minden esetben indokoljuk vagy adjunk példát a megfelelő tulajdonságú $f(x)$ függvényre.

Minden feladat 7 pontos.