Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2018. jan. 3.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int 2x \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: végezzünk parciális integrálást, majd a kapott törtfüggvényre alkalmazzuk a maradékos polinomosztást.

2. Mennyi az
$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} + \sin^{28} x \cdot \cos x\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. 2018. január 1-jén egyéves futamidejű változó kamatozású kötvényt vásárolunk egymillió forint értékben. A kamatráta az év első felében a január 1-jei 3%-ról július 1-jére lineárisan 5%-ra nő, majd az év második felében július 1-jétől 2019. január 1-jéig lineárisan 1%-ra csökken. Évközben lineáris kamatot számolva (azaz elhanyagolva a kamatos kamatot) mennyi kamatot kapunk 2019. január 1-jén?

   Segítség: az $r(t)$ kamatrátafüggvényre $r(0) = 3$, $r(1/2) = 5$ és $r(1) = 1$ teljesül, ha az időt években számoljuk, a $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokon pedig a függvény lineáris. Írjuk fel az $r(t)$ függvényt megadó lineáris (elsőfokú) formulát a $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokon külön-külön, majd számítsuk ki az $r(t)$ függvény görbéje alá elő területet a $[0, 1]$ intervallumon. Ez utóbbit érdemes az intervallum két felén egy-egy integrálással számolni. A teljes görbe alatti terület adja meg a kötvény éves kamatát százalékban.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ térben az $x+y=0$ síkra való tükrözés A mátrixát. Számoljuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét. Mit kapunk az $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vektorból, ha kétszer alkalmazzuk rá az A mátrixnak megfelelő lineáris transzformációt? Számoljunk mátrixszorzással.

5. Mennyi az
$$a_n = \frac{2018n^{2018} - 2018^{2018-n}}{(n^8 + n^{18})(2018 + n^{2000})}$$
sorozat határértéke?

6. Húzzunk érintőt a koordinátarendszer $(0, -4)$ pontjából az $f(x) = x^2$ függvényhez. Segítség: írjuk fel az $f(x)$ függvény érintőjének egyenletét egy tetszőleges x_0 pontban, majd válasszuk ki azt az x_0 értéket, amelyre az érintő átmegy a $(0, -4)$ ponton.

Elméleti feladatok

7. Mit értünk egy V vektortér bázisán? Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben adott három vektorról mely feltétel ellenőrzésével dönthető el egyszerűen, hogy bázist alkotnak-e. A p valós paraméter mely értéke mellett alkot bázist $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi három vektor?
$$\begin{pmatrix}10\\3\\7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$$

8. Mondjuk ki az összetett függvények deriválási szabályát. Állapítsuk meg, mely elemi függvények összetételéből kapjuk az $f(x) = \ln(1 + \sin(\pi e^x))$ függvényt, majd ezen elemi függvények deriváltjainak segítségével számoljuk ki $f(x)$ deriváltját. Mennyi a derivált értéke az $x_0 = 0$ pontban?

9. Az
$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$$
példán mutassuk meg, hogyan értelmezzük a nemkorlátos függvények integrálját improprius integrálként, majd számoljuk is ki az integrált. Segítség: az integrandus az 1 pontban ∞-hez tart.

Minden feladat 7 pontos.