Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2018. jan. 17.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálással számoljuk ki az
$$\int 2x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: először határozzuk meg a $v(x) = \sin(x^2)$ függvény deriváltját, majd a parciális integrálásnál alkalmazott szétválasztásnál az egyik tényező az előbb kiszámolt $v'(x)$ függvény legyen.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \frac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 4}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással határozzuk meg az $f(x) = \cosh x$ függvény görbéjének (az ún. láncgörbének) az ívhosszát az $x \in [0, 1]$ intervallumon. Segítség: használjuk a képletgyűjteményben is szereplő $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ összefüggést, a végeredményben fellépő sinh és cosh hiperbolikus függvényeket pedig a képletgyűjtemény alapján az e szám segítségével írjuk át.

Számítási feladatok

4. Jelölje e az $x = 2t - 8, y = -5t - 1, z = 4t + 3$ paraméteres egyenletrenszer által megadott egyenest, továbbá tekintsük a $3x + y + z + 27 = 0$ egyenletű síkot. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrenszerét, amely benne van az adott síkban, és amely merőlegesen metszi az e egyenest. Segítség: a keresett egyenes irányvektorát számoljuk vektoriális szorzással. Vegyük észre, hogy a keresett egyenes átmegy az e egyenes és az adott sík metszéspontján.

5. Mennyi az
$$a_n = \left(\frac{n^2 - 5}{(n+2)(n-2)}\right)^{(n+1)(2n-3)}$$
sorozat határértéke.

6. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = xe^{2x}$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Elméleti feladatok

7. Egy lineáris egyenletrenszer együtthatómátrixa alapján mit mondhatunk a megoldásszámról, ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő? Adottak az
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
mátrixok és vektorok. Döntsük el, hogy az A és B együtthatómátrixok esetén hány megoldás lehet. A $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok az egyenletrenszer lehetséges jobb oldalainak vektorai. A fenti mátrixok és vektorok segítségével adjunk példát minden lehetséges megoldásszámra. A megoldásokat nem kell kiszámolni.

8. Írjuk fel a Lagrange-féle középértéktételt. Egy repülőgép a Budapest és Sopron közötti 200 km-es távolságot egy óra alatt úgy teszi meg, hogy távolsága Budapesttől az $f(t) = 100(1 - \cos(\pi t))$ függvény szerint változik, ahol $t \in [0, 1]$. Ellenőrizzük a Lagrange-tétel állításában szereplő időpontot, amelyben a pillanatnyi sebesség az átlagsebességgel megegyezik. A keresett időpont kifejezéséhez használhatjuk a szögfüggvények inverzeit.

9. Hogy szól a Newton – Leibniz-formula? A tétel segítségével határozzuk meg az
$$f(x) = \frac{3x^3 - x^{-2/3} + 1}{\sqrt[3]{x}}$$
függvény határozott integrálját az $[1, 2]$ intervallumon.

Minden feladat 7 pontos.