Matematika EP1 vizsga megoldása, 2017. dec. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{2x^2-4x+9}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

   Megoldás:
$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-4x+9}{x^2+3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2(x^2+3)-2\cdot 2x+3}{x^2+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left(2-2\frac{2x}{x^2+3}+\frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2x-2\ln(x^2+3)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(x/\sqrt{3})+c\end{aligned}$$

2. Mennyi az
$$\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás:
$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x &= \int\left(x^{1/3}+(x^2+1)^{-1/3}x\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3}\frac{1}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{3}{4}\left(1+2^{2/3}-0-1\right)\\ &= \frac{3}{4}2^{2/3}\end{aligned}$$

3. Parabolaívekkel határolt 2 cm átmérőjű nyomóforma segítségével habkarikákat készítünk a karácsonyfára. Számítsuk ki egy habkarika térfogatát, amely megkapható a koordinátarendszerben az $f(x)=3-x^2$ függvény grafikonja által felülről, a $g(x)=1+x^2$ grafikonja által alulról határolt síkidom x tengely körüli megforgatásával kapott forgástestként. Segítség: a keresett forgástest térfogatát úgy számolhatjuk, hogy az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatottjának térfogatából kivonjuk a $g(x)$ függvény megforgatottjának térfogatát. (Ez nem egyenlő az $f(x)-g(x)$ megforgatottjának térfogatával.)

   A kapott térfogat segítségével adjunk nagyságrendi becslést, hogy egy liter habból hány habkarika készíthető. A becslésben π értékét 3-mal, a kapott törtet egy hozzá közeli egész számmal helyettesítsük.

   Megoldás: Mivel az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai a -1 és 1 pontokban metszik egymást, egy habkarika térfogata felírható a következő integrálként:
$$\begin{aligned}\pi\int_{-1}^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^1 g^2(x)\,\mathrm{d}x &= \pi\int_{-1}^1 (f^2(x)-g^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_{-1}^1\left((3-x^2)^2-(1+x^2)^2\right)\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_{-1}^1(8-8x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \pi\left[8x-\frac{8x^3}{3}\right]_{-1}^1\\ &= \pi\left(8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right)\\ &= \frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

   A 32/3-ot 11-re, π-t pedig 3-ra kerekítve egy habkarika térfogata 33 cm^3, azaz egy literből nagyságrendileg 30 habkarika készíthető (a pontos érték $29,45$).

Számítási feladatok

4. Tekintsük az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 18 \end{pmatrix}$$

vektorokat, melyek közül $\underline{u}_1$ és $\underline{u}_2$ merőlegesek egymásra. Keressünk olyan $\underline{u}_3$ vektort, amely $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is merőleges. Ekkor az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok automatikusan bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, ezért a fenti $\underline{v}$ vektor felírható a bázis elemeinek lineáris kombinációjaként. Keressük meg ezt a felírást két lépésben. Bontsuk fel először $\underline{v}$-t egy $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos $\underline{v}_p$ és egy rá merőleges $\underline{v}_m$ összetevők összegére. Ezután a $\underline{v}_m$ merőleges összetevőt bontsuk tovább $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Vegyük észre, hogy a merőleges komponens $\underline{u}_3$-mal párhuzamos.

Megoldás: A keresett $\underline{u}_3$ vektort $\underline{u}_1$ és $\underline{u}_2$ vektoriális szorzatával számolhatjuk:

$$\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ahol az utolsó lépésben a kapott vektor $-1/3$-szorosát vettük. Legyen ezért

$$\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\underline{v}$-nek $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos komponenséhez $\langle \underline{u}_1, \underline{v} \rangle = -4 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 18 = 33$ és $\|\underline{u}_1\|^2 = 16 + 1 + 16 = 33$, ezért $\underline{v}_p = \underline{u}_1$ és

$$\underline{v}_m = \underline{v} - \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Ennek $\underline{u}_2$-vel párhuzamos komponenséhez $\langle \underline{u}_2, \underline{v}_m \rangle = 2 \cdot 14 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 14 = 42$ és $\|\underline{u}_2\|^2 = 4 + 16 + 1 = 21$, ezért az $\underline{u}_2$-vel párhuzamos komponens

$$2\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a merőleges komponens pedig

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 2\underline{u}_3.$$

5. A 2 dl térfogatú henger alakú bögrék közül milyen sugár és magasság esetén lesz a börge felszíne a lehető legkisebb? Felszínen a henger palástját és alaplapját értjük együttesen, a bögre falvastagságát és a fülét elhanyagoljuk.

Megoldás: Legyen a keresett sugár r, a magasság pedig m. Ekkor a minimalizálandó felszín értéke $A = r^2\pi + 2r\pi m$. Mivel a térfogat adott, $r^2\pi m = 2$, amelyből $m = 2/(\pi r^2)$. Ebből az A felszín r-rel kifejezhető $A(r) = r^2\pi + 4/r$ alakban. A függvény minimumát deriválással keresve $A'(r) = 2r\pi - 4/r^2 = 0$ adódik, amelynek megoldása $r = \sqrt[3]{2/\pi}$, amelyhez $m = \sqrt[3]{2/\pi}$ tartozik. Mivel $A''(r) = 2\pi + 8/r^3$, ami minden pozitív r esetén pozitív, valóban minimumot találtunk.

6. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = 1/(x+2)^2$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Megoldás: Deriválással

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+2)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{(x+2)^4}, \quad f'''(x) = -\frac{24}{(x+2)^5},$$

amelybe $x_0 = 0$-t behelyettesítve

$$f(0) = \frac{1}{4}, \quad f'(0) = -\frac{1}{4}, \quad f''(0) = \frac{3}{8}, \quad f'''(0) = -\frac{3}{4}.$$

Innen a keresett Taylor-polinom $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^3$.

Elméleti feladatok

7. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A Gauss-elimináció segítségével hozzuk redukált lépcsős alakra. Első lépésben cseréljük fel a két sort. Írjuk fel, hogyan változik a fenti A mátrix determinánsa az egyes lépések elvégzésekor. Ezek alapján adjuk meg általában, hogy a Gauss-elimináció lehetséges lépései során hogyan változik az együtthatómátrix determinánsa.

Megoldás: A mátrixon a Gauss-eliminációt elvégezve

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ahol az első lépésben a két sort felcseréltük, a másodikban az első sor kétszeresét kivontuk a másodikból, majd az első sort 1/2-del szoroztuk. A mátrix determinánsa a fenti műveletsor alatt $-2, 2, 2, 1$ volt.

Általában két sor cseréjével a determináns a -1-szeresére változik, egy sor többszörösének a másik sorhoz adásával nem változik, egy sor λ-val való szorzása esetén λ-szorosára változik.

8. Mondjuk ki a sorozatok határértékére vonatkozó rendőrelvet. Ennek segítségével adjuk meg az

$$a_n = \frac{\cos(n^2)}{n^2}$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Ld. jegyzet. Az adott a_n esetén használva, hogy $-1 \leq \cos x \leq 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, a

$$-\frac{1}{n^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$$

becslés adódik, amelyben $-1/n^2$ és $1/n^2$ is 0-hoz tart, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

9. Tegyük fel, hogy $f(x)$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény, amely differenciálható $(0,1)$-en. Tudjuk továbbá, hogy $f(0) = 0$ és $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (0,1)$ esetén. Lehet-e ekkor az $f(1)$ függvényérték pozitív? Lehet-e $f(1) = 0$? Lehet-e $f(1) < 0$? A választ minden esetben indokoljuk vagy adjunk példát a megfelelő tulajdonságú $f(x)$ függvényre.

Megoldás: $f(1)$ lehet pozitív: bármely $c > 0$ esetén az $f(x) = cx$ függvény eleget tesz a feltételeknek és $f(1) = c$.

$f(1)$ lehet 0: ez egyedül az $f(x) = 0$ minden $x \in [0,1]$ függvény esetén állhat fenn.

$f(1)$ nem lehet negatív: ha $f(x) = d$ lenne valamely $d < 0$-val, akkor a Lagrange-féle középértéktétel miatt lenne olyan $x_0 \in (0,1)$, amelyre $f'(x_0) = (f(1) - f(0))/(1-0) = d < 0$. Ez ellentmond annak, hogy $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (0,1)$ esetén.