Matematika EP1 vizsga megoldása, 2018. jan. 3.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int 2x \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: végezzünk parciális integrálást, majd a kapott törtfüggvényre alkalmazzuk a maradékos polinomosztást.

   Megoldás: Először parciálisan integrálva $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \ln(x+1)$ szereposztásban
$$\int 2x \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 \ln(x+1) - \int x^2 \cdot \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$
Maradékos polinomosztással
$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$
ezért
$$\int 2x \cdot \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + c$$

2. Mennyi az
$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} + \sin^{28} x \cdot \cos x\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás:
$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi} \left(x^2 \cdot x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} + \sin^{28} x \cdot \cos x\right) \mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{2\pi} \left(x^{15/4} + \sin^{28} x \cos x\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{4}{19} x^{19/4} + \frac{\sin^{29} x}{29}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{4}{19}\left((2\pi)^{19/4} - \pi^{19/4}\right)
\end{aligned}$$

3. 2018. január 1-jén egyéves futamidejű változó kamatozású kötvényt vásárolunk egymillió forint értékben. A kamatráta az év első felében a január 1-jei 3%-ról július 1-jére lineárisan 5%-ra nő, majd az év második felében július 1-jétől 2019. január 1-jéig lineárisan 1%-ra csökken. Évközben lineáris kamatot számolva (azaz elhanyagolva a kamatos kamatot) mennyi kamatot kapunk 2019. január 1-jén?

   Segítség: az $r(t)$ kamatrátafüggvényre $r(0) = 3$, $r(1/2) = 5$ és $r(1) = 1$ teljesül, ha az időt években számoljuk, a $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokon pedig a függvény lineáris. Írjuk fel az $r(t)$ függvényt megadó lineáris (elsőfokú) formulát a $[0, 1/2]$ és $[1/2, 1]$ intervallumokon külön-külön, majd számítsuk ki az $r(t)$ függvény görbéje alá elő területet a $[0, 1]$ intervallumon. Ez utóbbit érdemes az intervallum két felén egy-egy integrálással számolni. A teljes görbe alatti terület adja meg a kötvény éves kamatát százalékban.

   Megoldás: A keresett kamatrátafüggvény az
$$r(t) = \begin{cases} 4t + 3 & \text{ha } t \in [0, 1/2] \\ -8t + 9 & \text{ha } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
formulával adható meg. A kapott kamat százalékban
$$\begin{aligned}
\int_0^1 r(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{1/2} r(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 r(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{1/2} (4t+3)\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 (-8t+9)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2t^2 + 3t\right]_0^{1/2} + \left[-4t^2 + 9t\right]_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + (-4+9) - \left(-1 + \frac{9}{2}\right) \\
&= \frac{7}{2},
\end{aligned}$$
tehát a kapott kamat értéke 35000 Ft.

Számítási feladatok

4. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ térben az $x+y=0$ síkra való tükrözés A mátrixát. Számoljuk ki az A mátrix determinánsát és inverzét. Mit kapunk az $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ vektorból, ha kétszer alkalmazzuk rá az A mátrixnak megfelelő lineáris transzformációt? Számoljunk mátrixszorzással.

   Megoldás: A bázisvektorok képeinek felírásával

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

   ezért

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

   Ebből $\det(A)=-1$ és $A^{-1}=A$ adódik.

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

5. Mennyi az

$$a_n=\frac{2018n^{2018}-2018^{2018-n}}{(n^8+n^{18})(2018+n^{2000})}$$

   sorozat határértéke?

   Megoldás: A számlálóból és a nevezőből is kiemelve a legnagyobb nagyságrendű tagot

$$a_n=\frac{2018n^{2018}-2018^{2018-n}}{(n^8+n^{18})(2018+n^{2000})}=\frac{n^{2018}}{n^{18}\cdot n^{2000}}\frac{(2018-\frac{2018^{2018}}{n^{2018}\cdot 2018^n})}{(\frac{1}{n^{10}}+1)(\frac{2018}{n^{2000}}+1)}\to 2018.$$

6. Húzzunk érintőt a koordinátarendszer $(0,-4)$ pontjából az $f(x)=x^2$ függvényhez. Segítség: írjuk fel az $f(x)$ függvény érintőjének egyenletét egy tetszőleges x_0 pontban, majd válasszuk ki azt az x_0 értéket, amelyre az érintő átmegy a $(0,-4)$ ponton.

   Megoldás: Mivel $f'(x)=2x$, az érintőegyenes egyenlete egy tetszőleges x_0 pontban $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$. Ez akkor megy át az $(x,y)=(0,-4)$ ponton, ha $-4-x_0^2=2x_0(0-x_0)$ teljesül, azaz $-4=-x_0^2$, tehát $x_0=\pm 2$ esetén. A két keresett érintő tehát $y-4=4(x-2)$ és $y-4=-4(x+2)$.

Elméleti feladatok

7. Mit értünk egy V vektortér bázisán? Az $\mathbb{R}^3$ vektortérben adott három vektorról mely feltétel ellenőrzésével dönthető el egyszerűen, hogy bázist alkotnak-e. A p valós paraméter mely értéke mellett alkot bázist $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi három vektor?

$$\begin{pmatrix}10\\3\\7\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}2\\1\\p\end{pmatrix}$$

   Megoldás: Ld. jegyzet. A három vektorból mint sorvektorból (vagy oszlopvektorból) alkotott négyzetes mátrix determinánsának kiszámításával lehet egyszerűen eldönteni: pontosan akkor alkotnak bázist, ha a determináns nem nulla. A példában a kérdéses determináns

$$\det\begin{pmatrix}10&3&7\\6&-1&0\\2&1&p\end{pmatrix}=-28p+56,$$

   azaz a vektorok pontosan a $p\neq 2$ esetben alkotnak bázist.

8. Mondjuk ki az összetett függvények deriválási szabályát. Állapítsuk meg, mely elemi függvények összetételéből kapjuk az $f(x)=\ln(1+\sin(\pi e^x))$ függvényt, majd ezen elemi függvények deriváltjainak segítségével számoljuk ki $f(x)$ deriváltját. Mennyi a derivált értéke az $x_0=0$ pontban?

Megoldás: Ld. jegyzet. Ha $g(x) = \ln x$, $h(x) = 1 + \sin x$ és $j(x) = \pi e^x$, akkor $f(x) = g(h(j(x)))$. Mivel $g'(x) = 1/x$, $h'(x) = \cos x$ és $j'(x) = \pi e^x$, ezért a láncszabály segítségével

$$f'(x) = g'(h(j(x)))h'(j(x))j'(x) = \frac{1}{1 + \sin(\pi e^x)} \cdot \cos(\pi e^x) \cdot \pi e^x,$$

továbbá $f'(0) = -\pi$.

9. Az

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^4} \, \mathrm{d}x$$

példán mutassuk meg, hogyan értelmezzük a nemkorlátos függvények integrálját impropius integrálként, majd számoljuk is ki az integrált. Segítség: az integrandus az 1 pontban ∞-hez tart.

Megoldás: Mivel az integrandus 1-ben nem korlátos,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^4} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^4} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[-\frac{1}{3(x-1)^3} \right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{1}{3} \right) = \infty.$$