Matematika EP1 vizsga megoldása, 2018. jan. 10.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int x \cdot \sin(\pi - 3x^2)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u = \pi - 3x^2$ helyettesítést, számoljuk ki az integrált az új u változóval, majd a kapott függvényt fejezzük ki az x változó segítségével.

   Megoldás: Mivel $u = \pi - 3x^2$, ezért $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -6x$, tehát
$$\int x \cdot \sin(\pi - 3x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \sin(\pi - 3x^2)(-6x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cos u + c = \frac{1}{6}\cos(\pi - 3x^2) + c.$$

2. Mennyi az
$$\int_{-1}^{2} \frac{5}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: Mivel a nevező gyökei valósak $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, ezért parciális törtekre bontható az integrandus
$$\frac{5}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2},$$
melyet integrálva
$$\int_{-1}^{2} \frac{5}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = [\ln|x-3| - \ln|x+2|]_{-1}^{2} = -2\ln 4.$$

3. Homogén lemezből kivágjuk azt a korlátos síkidomot, amelyet az $y = 1/(x+1)$ görbe, a koordinátatengelyek és az $x = 1$ egyenes határolnak. Számítsuk ki a lemezdarab tömegközéppontjának koordinátáit.

   Megoldás: A tömegközéppont kiszámításához az alábbi integrálokat kell elvégezni:
$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [x - \ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln|x+1|]_0^1 = \ln 2,$$
$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$
Innen a tömegközéppont x koordinátája $(1 - \ln 2)/\ln 2$, y koordinátája pedig $1/(4\ln 2)$.

Számítási feladatok

4. Három gyerek különböző édességeket kap ajándékba: Helga két müzliszeletet, hét piskótaszeletet és hét zabpelyhes kekszet, Bettina két müzliszeletet, hat piskótaszeletet és négy zabpelyhes kekszet, Kristóf pedig egy müzliszeletet, öt piskótaszeletet és nyolc zabpelyhes kekszet. Helga édességei 370 Ft-ba, Bettináé 300 Ft-ba, Kristófé pedig 290 Ft-ba kerültek összesen. Mennyi az egyes édességek egységára, ha ezek 10 Ft pozitív egész számú többszörösei. A megoldásnál alkalmazzuk a Gauss-elimináció módszerét.

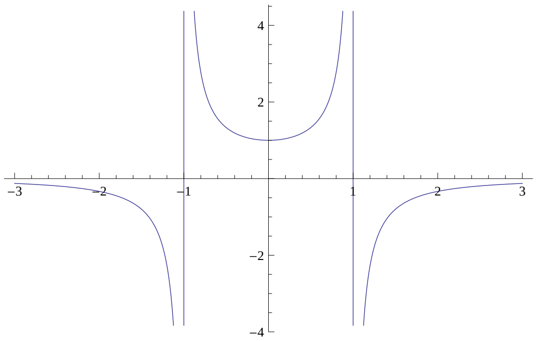
   Megoldás: Jelölje x a müzliszelet, y a piskótaszelet, z pedig a zabpelyhes keksz egységárát. Ekkor az alábbi lineáris egyenletrendszer írható fel:
$$\begin{aligned} 2x + 7y + 7z &= 370 \\ 2x + 6y + 4z &= 300 \\ x + 5y + 8z &= 290 \end{aligned}$$
amelynek végtelen sok megoldása paraméteresen $x = 7t - 60, y = 70 - 3t, z = t$ alakban adódik. Ezek közül a $t = 10$ és $t = 20$ esetben kapunk a feltételeknek megfelelő pozitív megoldást, azaz $x = 10, y = 40, z = 10$ vagy $x = 80, y = 10, z = 20$.

5. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = 3(x-5)^{2/3} - 4$ függvény grafikonjának $y = -1$ pontjához húzott érintőjére és amely átmegy az érintési ponton. Hol metszi a fenti érintőre merőleges egyenes a koordinátatengelyeket?

   Megoldás: Az adott $f(x)$ függvény $y = -1$ pontja az $x_0 = 6$ helyhez tartozik. Mivel $f'(x) = 2(x-5)^{-1/3}$, ezért az érintő meredeksége x_0-ban $f'(6) = 2$. Az érintőre merőleges egyenes meredeksége $-1/2$, továbbá átmegy a $(6, -1)$ érintési ponton, ezért az egyenlete $y+1 = -\frac{1}{2}(x-6)$, azaz $x+2y-4 = 0$. Ez az egyenes az x tengelyt a $(4, 0)$, az y tengelyt a $(0, 2)$ pontban metszi.

6. Vizsgáljuk meg az
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
   függvényt: adjuk meg az értelmezési tartományát, határozzuk meg, milyen intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, hol konvex és konkáv, hol van lokális szélsőértéke és inflexiós pontja, majd vázoljuk a függvény grafikonját. Az ábrázoláshoz segíthet a függvény határértékének kiszámolása az értelmezési tartomány határpontjaiban.

   Megoldás: A függvény a -1 és 1 pontokban nem értelmezett, az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. A függvény első két deriváltja
$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$
   Az $f'(x) = 0$ csak $x = 0$ esetén állhat fenn, az $f'(x)$ derivált $(1-x^2)^2$ nevezője minden olyan x-re pozitív, ahol a függvény értelmezett. Ezért a függvény monoton csökkenő a $(-\infty, -1)$ és $(-1, 0)$ intervallumokon, monoton növő a $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon. Az $f''(x)$ második derivált $2 + 6x^2$ számlálója minden x-re pozitív, a nevező $|x| < 1$ esetén pozitív, $|x| > 1$ esetén negatív. Ezért a függvény $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon konkáv, a $(-1, 1)$ intervallumon konvex. Az $x = 0$-ban a függénynek lokális minimuma van, inflexiós pontja nincs. A függény határértéke $\pm\infty$-ben 0, a ± 1-ben jobb és bal oldali határérték létezik csak, ami $\pm\infty$, ez leolvasható a függvény grafikonjáról.



Elméleti feladatok

7. Írjuk fel a vektoriális szorzás definiáló tulajdonságait, azaz adjuk meg a szorzat hosszát, irányát, állását. Alkalmazzuk a vektoriális szorzást az
$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 2t \\ z = -5t \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \begin{cases} x = 4t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$$
   egyenesek által feszített sík egyenletének felírásához.

   Megoldás: Ld. jegyzet. A két egyenes irányvektorának vektoriális szorzata
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -38 \\ -8 \end{pmatrix},$$
   ezért az általuk feszített sík egyenlete $6x - 38y - 8z = 0$.

8. Mondjuk ki általában a sorozat határértékének definícióját. Az
$$a_n = \frac{5n}{n-1}$$

sorozat esetén a definíció segítségével határozzunk meg az $\varepsilon = 0{,}1$-hez tartozó n_0 küszöbindexet.

Megoldás: Ld. jegyzet. Mivel a példában $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$, ezért olyan n-eket keresnünk, amelyre

$$\left|\frac{5n}{n-1} - 5\right| < \varepsilon.$$

Közös nevezőre hozva a bal oldalon az $|5/(n-1)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség adódik. Az abszolút érték elhagyható, mert a bal oldal mindig pozitív. Átrendezés után az $n > 1 + 5/\varepsilon$ egyenlőtlenséghez jutunk, amely az adott $\varepsilon = 0{,}1$ esetén az $n > 51$-et jelenti.

9. Hogy szól a L'Hospital-szabály? A tételt az egyszeri alkalmazás esetére mondjuk ki. A

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

határértékek közül melyikre alkalmazható a L'Hospital-szabály? Ahol lehet, alkalmazzuk, ahol nem, ott miért nem alkalmazható? Más módon számítsuk ki ezeket a határértékeket is.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

a L'Hospital-szabály segítségével, mivel az eredeti határérték $0/0$ típusú. A

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}$$

határérték $-\infty/0$ típusú, ezért a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, de az előbbiekből látszik, hogy a határérték $-\infty$. Mivel $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nem létezik, ezért a L'Hospital-szabály nem alkalmazható a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$$

határértékre. Mivel $-1 \le \sin x \le 1$, ezért a rendőrelv miatt a fenti határérték 0. Mivel ∞/∞ típusú, ezért a L'Hospital-szabályt alkalmazva

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$