Matematika EP1 vizsga megoldása, 2018. jan. 17.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálással számoljuk ki az
$$\int 2x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: először határozzuk meg a $v(x) = \sin(x^2)$ függvény deriváltját, majd a parciális integrálásnál alkalmazott szétválasztásnál az egyik tényező az előbb kiszámolt $v'(x)$ függvény legyen.

   Megoldás: A segítség alapján $v(x) = \sin(x^2)$ esetén $v'(x) = 2x\cos(x^2)$, ezért a parciális integráláshoz válasszuk az $u(x) = x^2$ függvényt. Ezzel
$$\int 2x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x^2) - \int 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x^2) + \cos(x^2) + c.$$

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \frac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   Megoldás: A maradékos polinomosztás módszerét alkalmazva az első lépésben
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x + 4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(3x^2 - 4x + 3 + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[x^3 - 2x^2 + 3x + \ln(x^2+1) + \arctan x\right]_0^1 \\ &= 1 - 2 + 3 + \ln 2 + \arctan 1 \\ &= 2 + \ln 2 + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. Integrálással határozzuk meg az $f(x) = \cosh x$ függvény görbéjének (az ún. láncgörbének) az ívhosszát az $x \in [0,1]$ intervallumon. Segítség: használjuk a képletgyűjteményben is szereplő $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ összefüggést, a végeredményben fellépő sinh és cosh hiperbolikus függvényeket pedig a képletgyűjtemény alapján az e szám segítségével írjuk át.

   Megoldás: Mivel $f'(x) = \sinh x$, az ívhossz értéke
$$\int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cosh x\,\mathrm{d}x = [\sinh x]_0^1 = \sinh 1 = \frac{e - 1/e}{2}.$$

Számítási feladatok

4. Jelölje e az $x = 2t - 8, y = -5t - 1, z = 4t + 3$ paraméteres egyenletrenszer által megadott egyenest, továbbá tekintsük a $3x + y + z + 27 = 0$ egyenletű síkot. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrenszerét, amely benne van az adott síkban, és amely merőlegesen metszi az e egyenest. Segítség: a keresett egyenes irányvektorát számoljuk vektoriális szorzással. Vegyük észre, hogy a keresett egyenes átmegy az e egyenes és az adott sík metszéspontján.

   Megoldás: A keresett egyenes irányvektora merőleges az e egyenes irányvektorára és a sík normálvektorára is, ezért vektoriális szorzással kiszámítható:
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

   A keresett egyenes egy pontja az e egyenes és a sík metszéspontja, amely a
$$3(2t-8) + (-5t-1) + 4t + 3 + 27 = 0$$
egyenletből a $t = -1$ paraméterű pontnak adódik, azaz $(-10, 4, -1)$. Ezért a keresett egyenes paraméteres egyenletrendszere $x = -9t - 10, y = 10t + 4, z = 17t - 1$.

5. Mennyi az

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 5}{(n+2)(n-2)} \right)^{(n+1)(2n-3)}$$

sorozat határértéke.

Megoldás: Mivel a zárójelben szereplő alap 1-hez tart, a sorozat átírható

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2 - 4} \right)^{2n^2-n-3}$$

alakba, amelynek határértéke e^{-2}.

6. Keressük meg azt a harmadfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban harmadrendben érinti az $f(x) = xe^{2x}$ függvényt, azaz f harmadfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Megoldás: Mivel $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$, $f''(x) = (4+4x)e^{2x}$ és $f'''(x) = (12+8x)e^{2x}$, ez $x_0 = 0$ helyettesítés után $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 4$, $f'''(0) = 12$ adódik. Ezért a keresett Taylor-polinom $x + 2x^2 + 2x^3$.

Elméleti feladatok

7. Egy lineáris egyenletrenszer együtthatómátrixa alapján mit mondhatunk a megoldásszámról, ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő? Adottak az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok és vektorok. Döntsük el, hogy az A és B együtthatómátrixok esetén hány megoldás lehet. A $\underline{c}$ és $\underline{d}$ vektorok az egyenletrenszer lehetséges jobb oldalainak vektorai. A fenti mátrixok és vektorok segítségével adjunk példát minden lehetséges megoldásszámra. A megoldásokat nem kell kiszámolni.

Megoldás: Ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla, akkor egy megoldás van, egyébként nincs megoldás vagy végtelen sok megoldás van. Mivel $\det(A) = 1$, az A együtthatómátrix esetén egy megoldás lehet, mivel $\det(B) = 0$, a B együtthatómátrix esetén nulla vagy végtelen sok megoldás lehet. Az A együtthatómátrix és tetszőleges jobb oldal esetén egy megoldás van, a B együtthatómátrix és a $\underline{c}$ vektorral mint jobb oldallal nincs megoldás, a B együtthatómátrix és a $\underline{d}$ vektorral mint jobb oldallal végtelen sok megoldás van.

8. Írjuk fel a Lagrange-féle középértéktételt. Egy repülőgép a Budapest és Sopron közötti 200 km-es távolságot egy óra alatt úgy teszi meg, hogy távolsága Budapesttől az $f(t) = 100(1 - \cos(\pi t))$ függvény szerint változik, ahol $t \in [0, 1]$. Ellenőrizzük a Lagrange-tétel állításában szereplő időpontot, amelyben a pillanatnyi sebesség az átlagsebességgel megegyezik. A keresett időpont kifejezéséhez használhatjuk a szögfüggvények inverzeit.

Megoldás: Ld. jegyzet. Mivel az átlagsebesség 200 km/h, a pillanatnyi sebességet pedig az $f'(t) = 100\pi \sin(\pi t)$ deriváltfüggvény adja meg, ezért a tétel olyan t időpont létezését biztosítja, amelyre $f'(t) = 200$, azaz amelyre $\sin(\pi t) = 2/\pi$. A keresett érték $t = \frac{1}{\pi} \arcsin(2/\pi)$ alakban fejezhető ki.

9. Hogy szól a Newton–Leibniz-formula? A tétel segítségével határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{3x^3 - x^{-2/3} + 1}{\sqrt[3]{x}}$$

függvény határozott integrálját az $[1, 2]$ intervallumon.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3x^3 - x^{-2/3} + 1}{\sqrt[3]{x}} \, dx &= \int_1^2 \left(3x^{8/3} - \frac{1}{x} + x^{-1/3} \right) dx \\
&= \left[\frac{9}{11} x^{11/3} - \ln x + \frac{3}{2} x^{2/3} \right]_1^2 \\
&= \frac{9}{11} \left(2^{11/3} - 1 \right) - \ln 2 + \frac{3}{2} \left(2^{2/3} - 1 \right)
\end{aligned}$$