Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2017. máj. 23.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{x^2-x-2}{x^2-9x+14}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \left(\frac{(2x)^{3/4}}{(4\sqrt{x})^2} - \frac{\sinh x}{(\cosh x)^5}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke? Segítség: a $\sinh x$ és $\cosh x$ függvények definíciója és deriváltja a képletgyűjteményben megtalálható.

3. Integrálással számoljuk ki, mekkora az $y = \ln x$, $y = \sin(\pi x)$ és $x = 2$ görbék közé eső korlátos tartomány területe. Segítség: az $\ln x$ függvény integrálásakor végezzünk parciális integrálást.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
mátrixokat. Minden lehetséges módon szorozzunk össze a fentiek közül két mátrixot. Azt is adjuk meg, mely szorzatok nem értelmezettek. A fenti mátrixok közül melyeknek van inverze? Számítsuk ki az inverzeket is.

5. Legyenek
$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$
az $\mathbb{R}^3$ tér vektorai. Ellenőrizzük, hogy $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ páronként merőlegesek egymásra. Nem kell ellenőrizni, de ebből következik, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban. A feladat további részében megkeressük a $\underline{v}$ vektor felírását a bázis elemeinek lineáris kombinációjaként az alábbi két lépésben. Bontsuk fel először $\underline{v}$-t egy $\underline{u}_3$-mal párhuzamos $\underline{v}_p$ és egy rá merőleges $\underline{v}_m$ összetevők összegére. Ezután a $\underline{v}_m$ merőleges összetevőt bontsuk tovább $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

6. Egy ablak két részből áll: az alsó része téglalap alakú, a felső része a téglalap vízszintes oldalára az átmérőjével illeszkedő félkör. Az ablak területe 1 m^2, kerülete (a két rész illeszkedését nem számítva) minimális az adott alakú és területű alakzatok közül. Mekkora a félkör sugara?

Elméleti feladatok

7. Adjuk meg a Gauss-elimináció megengedett lépéseit. Tegyük fel, hogy az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Hogyan változik ekkor az együtthatómátrix determinánsa az egyes lépések elvégzésekor? Az
$$x + 2y = 3$$
$$2x + y = -3$$
egyenletrendszer esetén adjunk példát az adott lépések elvégzésére, és ellenőrizzük a determináns változását. Az egyenletrendszert nem kell megoldani, ezért nem jár pont.

8. Mondjuk ki a L'Hospital-szabály állítását a jegyzetben egyszerűnek nevezett egyszeres alkalmazás esetén. Számoljuk ki a segítségével a
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$
határértéket. Segítség: a példában a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazására is szükség lehet. A kapott határérték a $\sin x$ függvény 0-beli Taylor-polinomjában a harmadfokú tag együtthatóját adja meg.

9. Értelmezzük egy adott $f(x)$ folytonos függvény primitív függvényét egy I intervallumon. Egyértelmű-e a primitív függvény? Ha nem, akkor az $f(x)$-hez az I intervallumon hány primitív függvény tartozik. Hogyan írható fel az I intervallumon az $f(x)$-hez tartozó összes primitív függvény? Adjuk meg az $f(x) = 4x^2 - 9$ függvény összes primitív függvényét az $I = \mathbb{R}$ intervallumon.

Minden feladat 7 pontos.