

Név:
Neptun-kód:

| ZH | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | V | Σ | jegy |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| | | | | | | | | | | | | |

Matematika EP1 vizsga, 2018. dec. 19.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + 2} dx$$

határozatlan integrál értéke?

2. Az

$$\int \frac{3x^2 - 6}{\sqrt{2x - 3}} dx$$

integrálban végezzük el az $u = \sqrt{2x - 3}$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált az u változóval, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változóval kifejezve.

3. A karácsonyfa égőfűzérére $u(t) = \sin(t)$ nagyságú időben változó feszültséget kapcsolunk. Ha az égőfűzér ellenállása egységnyi, akkor a t_1 és t_2 időpontok között végzett elektromos munka értéke megegyezik az

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)^2 dt$$

integrállal. Integrálással ellenőrizzük, hogy a fent megadott $u(t)$ változó feszültség effektív értéke $1/\sqrt{2}$, azaz az $u(t)$ feszültség által egy periódus alatt az égőfűzéren elvégzett munka megegyezik az $u_{\text{eff}}(t) = 1/\sqrt{2}$ konstans egyenfeszültség által ugyanannyi idő alatt ugyanazon az ellenálláson végzett munkával.

Segítség: a $\sin^2(t)$ függvény integrálásához használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x - 3y - 8z &= 16 \\ -3x + 11y + az &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszer, ahol x, y, z az ismeretlenek. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása.

5. Jelölje A az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés mint \mathbb{R}^2 síkbeli lineáris transzformáció mátrixát, B pedig az origó körüli óramutató járásával ellentétes irányú $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixát. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektoron mátrixszorzás segítségével ellenőrizzük, hogy először az A majd a B transzformációt elvégezve más eredményt kapunk, mint fordított sorrendben.
6. Írjuk fel az $f(x) = \arctg(2x + 1) - 5$ függvény azon érintőjének egyenletét, amely merőleges az $x + y = 0$ egyenesre.

Elméleti feladatok

7. (a) Hogyan fejezhető ki az \mathbb{R}^3 tér adott \underline{v} vektora az egyenletével adott S sík irányába eső és rá merőleges komponensek összegeként? Segítség: mi az S sík normálvektorának viszonya a keresett komponensekkel?
(b) Mik a keresett komponensek a $\underline{v} = (13, 4, 11)$ vektor és $3x - 2y + z = 5$ sík esetén?
8. (a) Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet.
(b) A rendőrelv segítségével számoljuk ki az $a_n = \{n\pi\}/n$ sorozat határértékét, ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelenti, azaz azt a 0 és 1 közötti számot, amelyre $x - \{x\}$ egész szám.
9. (a) Mit jelent egy adott f függvény x_0 pontbeli simulóköre?
(b) Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonja az egységkör felső íve, melynek simulóköre önmaga. Deriválással és behelyettesítéssel ellenőrizzük erre az esetre az $x_0 = 0$ pontban a simulókör sugarára adott $(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}/f''(x_0)$ összefüggést. (A képletből kapott sugár előjele azt fejezi ki, hogy a simulókör középpontja a görbe felett vagy alatt helyezkedik el.)

Minden feladat 7 pontos.