

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2019. jan. 4.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás segítségével számítsuk ki az

$$\int x\sqrt[3]{x+1} dx$$

határozatlan integrált. Segítség: az integrandus x tényezőjét válasszuk a parciális integrálás formulájában később deriválandó függvénynek.

2. Mennyi az

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^2 - 3x} dx$$

határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki az alábbiak szerint annak a csonka kúpnak a térfogatát, amelynek alapköre 2 sugarú, fedőköre 1 sugarú, magassága pedig 2. Ehhez először keressük meg azt az $f(x)$ lineáris függvényt, amelyre $f(0) = 2$ és $f(2) = 1$. A függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottja adja a keresett csonka kúp palástját. A kapott forgástest térfogatát a képletgyűjteményben szereplő integrálformulával számoljuk ki.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az \mathbb{R}^3 térben az $\underline{a} = (1, 0, 2)$, $\underline{b} = (2, 3, 1)$ és $\underline{c} = (4, 1, 3)$ vektorokat. Vektoriális szorzás segítségével számoljuk ki az \underline{a} és \underline{b} vektorok által feszített paralelogramma területét. Vegyes szorzás segítségével határozzuk meg az \underline{a} , \underline{b} és \underline{c} vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát. Mekkora a paralelepipedon \underline{a} és \underline{b} vektorok által feszített lapjához tartozó magassága?

5. Mennyi az

$$a_n = \sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 + 2n^2 + 3n}$$

sorozat határértéke?

6. Keressük meg azt a negyedfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban negyedrendben érinti az $f(x) = \sin(\pi(x + 1/2))$ függvényt, azaz f negyedfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

Elméleti feladatok

7. (a) Hány megoldása lehet egy három egyenletből álló háromismeretlenes lineáris egyenletrendszernek? Adjuk meg az együtthatómátrix determinánsának lehetséges értékeit ezekben az esetekben.
(b) A Gauss-elimináció elvégzése után egy lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa az alábbi, amelyben az utolsó sor nem látható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ * & * & * & * \end{array} \right)$$

Töltsük ki az utolsó sort úgy, hogy az előző feladatrész szerinti minden lehetséges megoldásszámot megkapjunk.

8. (a) Írjuk le az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját.
(b) A definíció alapján számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját az $x_0 = 0$ pontban. Ehhez használjuk a képletgyűjteményben szereplő megfelelő nevezetes függvényhatárértéket.
(c) Az exponenciális függvény azonosságát és az előző feladatrészt felhasználva számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját tetszőleges x_0 pontban.
9. (a) Mi az improprius integrál definíciója korlátos integrandus és végtelen intervallum esetén?
(b) A definíció alapján számoljuk ki az

$$\int_0^\infty \frac{1}{2x+1} dx$$

improprius integrált.

Minden feladat 7 pontos.