Név:	ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy
Neptun-kód:													

Matematika EP1 vizsga, 2019. jan. 11.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az
$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke? Segítség: emeljünk ki a számlálóból $\sin^2 x$-et, ezt fejezzük ki $\cos^2 x$ segítségével, és az egyszerűsítes után kapott két tagot integráljuk külön-külön.

3. Melyik y tengellyel párhuzamos egyenes felezi annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet a koordinátarendszerben az $f(x)=2/x^3$ és $g(x)=1/x^2$ függvények grafikonjai és az $x=1$ egyenes határolnak? Segítség: számoljuk ki a síkidom $x=1$ és $x=a$ közé eső részének területét, majd keressük meg az a paraméter megfelelő értékét.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az $\underline{u}=(2,2,-1)$ és $\underline{v}=(3,0,-2)$ vektorokat. Keressünk az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ síkjában az $\underline{u}$-ra merőleges vektort az alábbi lépésekben. Vektoriális szorzással számoljuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ síkjának $\underline{n}$ normálvektorát, majd a keresett $\underline{u}$-ra és $\underline{n}$-re is merőleges vektort újabb vektoriális szorzással határozzuk meg.

5. Mennyi az
$$a_n=\frac{5n^3-2^{3-n}}{n(3^{-n/2}+6n^2)}$$
sorozat határértéke?

6. Vizsgáljuk meg az $f(x)=e^x/x$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. Legyenek adottak az $\mathbb{R}^3$ térben az $\underline{u}_1=(3,2,1)$, $\underline{u}_2=(0,2,1)$, $\underline{u}_3=(0,0,1)$ vektorok. A három vektor pontosan akkor alkot bázist $\mathbb{R}^3$-ban, ha minden $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ vektor egyértelműen áll elő az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Jelölje $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ az együtthatókat.

   Írjuk fel azt a $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$-ra mint ismeretlenekre vonatkozó lineáris egyenletrendszert, amelyet $\underline{b}$-nek az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ lineáris kombinációjaként való kifejezését komponensenként felírva kapunk. Mi a feltétele, hogy a felírt egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen? Az egyenletrendszer megoldása nélkül ellenőrizzük ezt a feltételt a fenti $\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3$ vektorokra.

8. (a) Mi a függvényhatárérték definíciója egy x_0 pontban?
   (b) Mi a függvény folytonosságának definíciója egy x_0 pontban?
   (c) A definíció alapján ellenőrizzük, hogy az
   $$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$$
   függvénynek létezik-e a határértéke az $x_0=1$ pontban és ha igen, akkor mennyi? Folytonos-e a függvény ebben a pontban?

9. (a) Mondjuk ki a Cauchy-féle középértéktételt.
   (b) A $[0,1]$ intervallumon értelmezett
   $$f(x)=x,\quad g(x)=-x(x-1),\quad h(x)=\frac{1}{2}-\left|x+\frac{1}{2}\right|,\quad j(x)=\mathrm{tg}(\pi x)$$
   függvények közül melyikre alkalmazható a tétel? Amelyikre igen, annál keressük meg a tétel által garantáltan létező pontot is. Amelyikre nem, annál a tétel melyik feltétele sérül?

Minden feladat 7 pontos.