Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2019. jan. 18.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálással számítsuk ki az
$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: az integrandus $\operatorname{arctg} x$ tényezőjét válasszuk a parciális integrálás formulájában később deriválandó függvénynek, majd integráljuk a kapott törtfüggvényt.

2. Mennyi az
$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} + \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x + 1}} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással számoljuk ki az $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ függvény grafikonjának ívhosszát az $x \in [1,2]$ intervallum felett. Segítség: a derivált négyzetre emelésekor kapott kétszeres szorzat $-1/2$, amelyhez 1-et hozzáadva újra teljes négyzetet kapunk.

Számítási feladatok

4. Adottak az $\underline{u}_1 = (0,1,1)$ és $\underline{u}_2 = (0,-1,1)$ vektorokat az $\mathbb{R}^3$ térben. Ellenőrizzük, hogy merőlegesek egymásra. Az alábbiak szerint egészítsük ki ezt a két vektort egy $\underline{u}_3$ vektorral az $\mathbb{R}^3$ vektortér ún. ortogonális bázisává, azaz egy olyan vektorrendszerré, amelyben minden vektor merőleges a másik kettőre. Legyen $\underline{v} = (1,3,5)$. Bontsunk fel $\underline{v}$-t $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges komponenst bontsunk tovább $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére. A kapott komponensek közül melyiket választhatjuk $\underline{u}_3$-nak?

5. Mennyi az
$$a_n = \left(\frac{n^2}{(n+1)(n-1)} \right)^{2n-3}$$
sorozat határértéke?

6. Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Mekkora legyen az egyenes szakaszok hossza és a félkörívek sugara, hogy a futópálya hossza 400 m legyen és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

Elméleti feladatok

7. (a) Adott $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén írjuk le az $\underline{u} \times \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságait.
   (b) Számoljuk ki az $\underline{u} = (2,3,-2)$ és $\underline{v} = (4,1,0)$ vektoriális szorzatát. Mennyi az általuk bezárt szög szinusza?

8. (a) Egy f differenciálható függvény deriváltjának milyen tulajdonsága esetén monoton növő ill. csökkenő az f függvény egy (a,b) intervallumon?
   (b) Mit mondhatunk egy f differenciálható függvény deriváltjáról, ha f monoton növő ill. csökkenő egy (a,b) intervallumon?
   (c) Mit mutat az $f(x) = x^3$ függvény 0-beli viselkedése a feladat (a) pontjában kérdezett tétel megfordíthatóságáról? A választ indokoljuk.

9. (a) Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt.
   (b) Írjuk fel az $f(x) = 2x - 3$ függvény összes primitív függvényét a $[0,1]$ intervallumon. Két különböző primitív függvény használatával számoljuk ki kétszer az
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált, majd ellenőrizzük, hogy a két esetben ugyanazt az eredményt kapjuk-e.

Minden feladat 7 pontos.