Matematika EP1 vizsga megoldása, 2018. dec. 19.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \frac{3x+2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

   Megoldás: Mivel a nevező deriváltja $(x^2+2)' = 2x$, a kérdéses integrál átírható
$$\int \frac{3x+2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+2} + \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(x/\sqrt{2}) + c.$$

2. Az
$$\int \frac{3x^2-6}{\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x$$
integrálban végezzük el az $u = \sqrt{2x-3}$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált az u változóval, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változóval kifejezve.

   Megoldás: Az adott $u = \sqrt{2x-3}$ összefüggésből $x = (u^2+3)/2$, ezért $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = u$, vagyis az integrál
$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-6}{\sqrt{2x-3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3\left(\frac{u^2+3}{2}\right)^2 - 6}{u}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left(\frac{3}{4}(u^4+6u^2+9) - 6\right)\mathrm{d}u \\
&= \int \left(\frac{3}{4}u^4 + \frac{9}{2}u^2 + \frac{27}{4} - 6\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{20}u^5 + \frac{3}{2}u^3 + \frac{3}{4}u + c \\
&= \frac{3}{20}(2x-3)^{5/2} + \frac{3}{2}(2x-3)^{3/2} + \frac{3}{4}\sqrt{2x-3} + c.
\end{aligned}$$

3. A karácsonyfa égőfüzérére $u(t) = \sin(t)$ nagyságú időben váltakozó feszültséget kapcsolunk. Ha az égőfüzér ellenállása egységnyi, akkor a t_1 és t_2 időpontok között végzett elektromos munka értéke megegyezik az
$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)^2\,\mathrm{d}t$$
integrállal. Integrálással ellenőrizzük, hogy a fent megadott $u(t)$ váltakozó feszültség effektív értéke $1/\sqrt{2}$, azaz az $u(t)$ feszültség által egy periódus alatt az égőfüzéren elvégzett munka megegyezik az $u_{\mathrm{eff}}(t) = 1/\sqrt{2}$ konstans egyenfeszültség által ugyanannyi idő alatt ugyanazon az ellenálláson végzett munkával.

   Segítség: a $\sin^2(t)$ függvény integrálásához használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést.

   Megoldás: A váltakozó feszültség által végzett munka a 0 és 2π időpontok között
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - 0 - 0 + 0 = \pi.$$
   Ugyanezen idő alatt a konstans egyenfeszültség által végzett munka
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\begin{aligned}
x - 3y + 2z &= 5 \\
2x - 3y - 8z &= 16 \\
-3x + 11y + az &= b
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása.

Megoldás: Gauss-eliminációval az egyenletrendszer együtthatómátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & a+14 & b+11 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha önellentmondó sort kapunk. Ez pontosan akkor lehet, ha $a + 14 = 0$ azaz $a = -14$ és $b + 11 \neq 0$ azaz $b \neq -11$.

5. Jelölje A az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés mint $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformáció mátrixát, B pedig az origó körüli óramutató járásával ellentétes irányú $\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixát. A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektoron mátrixszorzás segítségével ellenőrizzük, hogy először az A majd a B transzformációt elvégezve más eredményt kapunk, mint fordított sorrendben.

   Megoldás: A két transzformáció mátrixa

   $$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Mátrixszorzással

   $$AB\underline{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad BA\underline{v} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

6. Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{arctg}(2x + 1) - 5$ függvény azon érintőjének egyenletét, amely merőleges az $x + y = 0$ egyenesre.

   Megoldás: Mivel a keresett érintő meredeksége 1, az $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2+1} = 1$ egyenletet oldjuk meg, amelynek megoldása $x = -1$ és $x = 0$. Az érintési pontokban felvett függvényértékek $f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) - 5 = -\frac{\pi}{4} - 5$ és $f(0) = \operatorname{arctg}(1) - 5 = \frac{\pi}{4} - 5$, hiszen $\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1$ és $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$. Így a keresett érintők egyenletei $y = x - \frac{\pi}{4} - 4$ és $y = x + \frac{\pi}{4} - 5$.

Elméleti feladatok

7. (a) Hogyan fejezhető ki az $\mathbb{R}^3$ tér adott $\underline{v}$ vektora az egyenletével adott S sík irányába eső és rá merőleges komponensek összegeként? Segítség: mi az S sík normálvektorának viszonya a keresett komponensekkel?

   (b) Mik a keresett komponensek a $\underline{v} = (13, 4, 11)$ vektor és $3x - 2y + z = 5$ sík esetén?

   Megoldás:

   (a) Mivel a normálvektor merőleges a síkra, a normálvektorra merőleges és vele párhuzamos komponensekre kell bontani az ismert képlet alapján.

   (b) A sík normálvektora $\underline{n} = (3, -2, 1)$, ezért az S-re merőleges azaz $\underline{n}$-nel párhuzamos komponenshez $\langle \underline{v}, \underline{n} \rangle = 13 \cdot 3 + 4(-2) + 11 \cdot 1 = 42$ és $\|\underline{n}\|^2 = 9 + 4 + 1 = 14$, azaz a keresett vektor $\frac{42}{14}\underline{n} = 3\underline{n} = (9, -6, 3)$. Az S irányába eső azaz $\underline{n}$-re merőleges komponens pedig $(13, 4, 11) - (9, -6, 3) = (4, 10, 8)$.

8. (a) Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet.

   (b) A rendőrelv segítségével számoljuk ki az $a_n = \{n\pi\}/n$ sorozat határértékét, ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelenti, azaz azt a 0 és 1 közötti számot, amelyre $x - \{x\}$ egész szám.

   Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet.

   (b) Mivel bármely valós szám törtrésze 0 és 1 közé esik, ezért fennáll az $0 \leq a_n \leq 1/n$ egyenlőtlenség minden n-re, továbbá $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, amelyből a rendőrelv miatt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ következik.

9. (a) Mit jelent egy adott f függvény x_0 pontbeli simulóköre?

   (b) Az $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ függvény grafikonja az egységkör felső íve, melynek simulóköre önmaga. Deriválással és behelyettesítéssel ellenőrizzük erre az esetre az $x_0 = 0$ pontban a simulókör sugarára adott $(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}/f''(x_0)$ összefüggést. (A képletből kapott sugár előjele azt fejezi ki, hogy a simulókör középpontja a görbe felett vagy alatt helyezkedik el.)

Megoldás:

(a) Ld. jegyzet.

(b) Az adott függvény deriváltjai

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f''(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Mivel $1 + (f'(x))^2 = 1 + x^2/(1-x^2) = 1/(1-x^2)$, ezért a simulókör sugarára adott formulából $(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}/f''(x_0) = -1$ adódik minden $x_0 \in (-1,1)$ esetén.