Matematika EP1 vizsga megoldása, 2019. jan. 4.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálás segítségével számítsuk ki az

$$\int x\sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált. Segítség: az integrandus x tényezőjét válasszuk a parciális integrálás formulájában később deriválandó függvénynek.

Megoldás: Legyen $f(x) = x$ és $g'(x) = \sqrt[3]{x+1}$, ekkor $f'(x) = 1$ és $g(x) = \frac{3}{4}(x+1)^{4/3}$, amellyel

$$\int x\sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x(x+1)^{4/3} - \frac{3}{4}\int (x+1)^{4/3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x(x+1)^{4/3} - \frac{9}{28}(x+1)^{7/3} + c.$$

2. Mennyi az

$$\int_1^2 \frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke?

Megoldás: Maradékos polinomosztással

$$\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-3x} = x+1+\frac{4x+3}{x^2-3x}.$$

Mivel a nevezőnek két különböző valós gyöke van $x^2-3x = x(x-3)$, parciális törtekre bontással

$$\frac{4x+3}{x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$$

ahol $A = -1$ és $B = 5$ adódik. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(x+1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x-3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln|x| + 5\ln|x-3|\right]_1^2 \\
&= 2+2-\ln 2+5\ln 1 - \left(\frac{1}{2}+1-\ln 1+5\ln 2\right) \\
&= \frac{5}{2} - 6\ln 2.
\end{aligned}$$

3. Integrálással számítsuk ki az alábbiak szerint annak a csonka kúpnak a térfogatát, amelynek alapköre 2 sugarú, fedőköre 1 sugarú, magassága pedig 2. Ehhez először keressük meg azt az $f(x)$ lineáris függvényt, amelyre $f(0) = 2$ és $f(2) = 1$. A függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatottja adja a keresett csonka kúp palástját. A kapott forgástest térfogatát a képletgyűjteményben szereplő integrálformulával számoljuk ki.

Megoldás: A keresett függvény $f(x) = 2 - x/2$, amellyel a csonka kúp térfogata

$$\begin{aligned}
\pi\int_0^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x &= \pi\int_0^2 \left(2-\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^2 \left(4-2x+\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\left[4x - x^2 + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 \\
&= \pi(8-4+\frac{8}{12}-0) \\
&= \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az $\underline{a} = (1,0,2)$, $\underline{b} = (2,3,1)$ és $\underline{c} = (4,1,3)$ vektorokat. Vektoriális szorzás segítségével számoljuk ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által feszített paralelogramma területét. Vegyes szorzás segítségével határozzuk meg az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által feszített paralelepipedon térfogatát. Mekkora a paralelepipedon $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által feszített lapjához tartozó magassága?

   Megoldás: Mivel
$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$
   a paralelogramma területe a vektoriális szorzat hossza, azaz $\sqrt{(-6)^2+3^2+3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. A három vektor vegyes szozata
$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12,$$
   amelynek abszolút értéke 12 a paralelepipedon térfogata. A keresett magasság a térfogat és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ által feszített lap területének hányadosa, azaz
$$\frac{12}{3\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

5. Mennyi az
$$a_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+2n^2+3n}$$
   sorozat határértéke?

   Megoldás: A megfelelő bővítés és kiemelés után
$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+2n^2+3n}\right) \frac{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+2n^2+3n}}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+2n^2+3n}} \\ &= \frac{2-2n^2-3n}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt{n^3+2n^2+3n}} \\ &= \frac{n^2\left(\frac{2}{n^2} - 2 - \frac{3}{n}\right)}{n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}, \end{aligned}$$
   amely $-\infty$-hez tart.

6. Keressük meg azt a negyedfokú polinomot, amely az $x_0 = 0$ pontban negyedrendben érinti az $f(x) = \sin(\pi(x+1/2))$ függvényt, azaz f negyedfokú Taylor-polinomját a 0-ban.

   Megoldás: Mivel $f'(x) = \pi\cos(\pi(x+1/2))$, $f''(x) = -\pi^2\sin(\pi(x+1/2))$, $f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi(x+1/2))$, $f^{(4)}(x) = \pi^4\sin(\pi(x+1/2))$, behelyettesítve $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\pi^2$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = \pi^4$, ezért a keresett Taylor-polinom $1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^4}{24}x^4$.

Elméleti feladatok

7. (a) Hány megolása lehet egy három egyenletből álló háromismeretlenes lineáris egyenletrendszernek? Adjuk meg az együtthatómátrix determinánsának lehetséges értékeit ezekben az esetekben.

   (b) A Gauss-elimináció elvégzése után egy lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa az alábbi, amelyben az utolsó sor nem látható:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right)$$
   Töltsük ki az utolsó sort úgy, hogy az előző feladatrész szerinti minden lehetséges megoldásszámot megkapjunk.

   Megoldás:

   (a) Az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása lehet. 0 és végtelen sok megoldás esetén az együtthatómátrix dereminánsa 0, pontosan 1 megoldás esetén a determináns 0-tól különböző.

(b) Nincs megoldás, ha az utolsó sor önellentmondó, azaz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

alakú valamely $c \neq 0$ konstanssal. Pontosan egy megoldás van, ha az utolsó sorban van vezéregyes, azaz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$$

ahol $d \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Végtelen sok megoldás van, ha az utolsó sor csupa 0-ból áll.

8. (a) Írjuk le az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját.

   (b) A definíció alapján számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját az $x_0 = 0$ pontban. Ehhez használjuk a képletgyűjteményben szereplő megfelelő nevezetes függvényhatárértéket.

   (c) Az exponenciális függvény azonosságát és az előző feladatrészt felhasználva számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény deriváltját tetszőleges x_0 pontban.

Megoldás:

(a) Ld. jegyzet.

(b)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

(c)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

9. (a) Mi az improprius integrál definíciója korlátos integrandus és végtelen intervallum esetén?

   (b) A definíció alapján számoljuk ki az

$$\int_0^\infty \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrált.

Megoldás:

(a) Ld. jegyzet.

(b)

$$\int_0^\infty \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{K \to \infty} \int_0^K \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{K \to \infty} \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^K = \lim_{K \to \infty} \left(\frac{\ln(2K+1)}{2} - 0\right) = \infty.$$