Matematika EP1 vizsga megoldása, 2019. jan. 11.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az

$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int \left(1+\frac{3}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+4}+\frac{1}{x^2-4x+4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1+\frac{3}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= x+3\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+c\end{aligned}$$

ahol az első lépésben maradékos polinomosztást végeztünk és kiemeltük a nevező deriváltját, a második lépésben a nevezőt átírtuk $x^2-4x+4=(x-2)^2$ alakba, majd egyszerűsítettünk a második tagban.

2. Mennyi az

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x$$

határozott integrál értéke? Segítség: emeljünk ki a számlálóból $\sin^2 x$-et, ezt fejezzük ki $\cos^2 x$ segítségével, és az egyszerűsítes után kapott két tagot integráljuk külön-külön.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x}{\cos^7 x}-\frac{\sin x}{\cos^5 x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{6\cos^6 x}-\frac{1}{4\cos^4 x}\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{6(1/\sqrt{2})^6}-\frac{1}{4(1/\sqrt{2})^4}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

3. Melyik y tengellyel párhuzamos egyenes felezi annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet a koordinátarendszerben az $f(x)=2/x^3$ és $g(x)=1/x^2$ függvények grafikonjai és az $x=1$ egyenes határolnak? Segítség: számoljuk ki a síkidom $x=1$ és $x=a$ közé eső részének területét, majd keressük meg az a paraméter megfelelő értékét.

Megoldás: Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjainak metszéspontja $x=2$-ben van. A feladatban adott korlátos síkidom $x=1$ és $x=a$ közé eső részének területe

$$\int_1^a \left(\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right]_1^a = \frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}.$$

A terület értéke $a=2$ esetén $1/4$, ezért a keresett értékre az

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{8}$$

egyenlet teljesül. Ezt $8a^2$-tel szorozva és rendezve az $a^2-8a+8=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek $4\pm2\sqrt{2}$ megoldásai közül $4-2\sqrt{2}$ esik 1 és 2 közé.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az $\underline{u} = (2, 2, -1)$ és $\underline{v} = (3, 0, -2)$ vektorokat. Keressünk az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ síkjában az $\underline{u}$-ra merőleges vektort az alábbi lépésekben. Vektoriális szorzással számoljuk ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ síkjának $\underline{n}$ normálvektorát, majd a keresett $\underline{u}$-ra és $\underline{n}$-re is merőleges vektort újabb vektoriális szorzással határozzuk meg.

   Megoldás: Normálvektornak választható az $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v} = (-4, 1, -6)$ vektor. Újabb vektoriális szorzással a keresett vektor $\underline{u} \times \underline{n} = (-11, 16, 10)$.

5. Mennyi az

$$a_n = \frac{5n^3 - 2^{3-n}}{n(3^{-n/2} + 6n^2)}$$

   sorozat határértéke?

   Megoldás: A számlálóból és a nevezőből is n^3-öt kiemelve

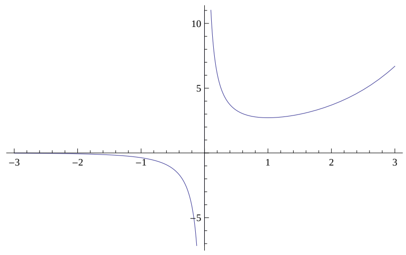
$$\frac{5n^3 - 2^{3-n}}{n(3^{-n/2} + 6n^2)} = \frac{n^3(5 - \frac{8n^3}{2^n})}{n^3(\frac{1}{n^2 3^{n/2}} + 6)} \to \frac{5}{6}.$$

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = e^x/x$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

   Megoldás: A függvény minden $x \neq 0$-ra értelmezett.

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3},$$

   amelyből az $f'(x) = 0$ megoldása $x = 1$, az $f''(x) = 0$ egyenletnek pedig nincs megoldása. A függvény deriváltja negatív, ezért a függvény monoton csökken a $(-\infty, 0)$ ill. $(0, 1)$ intervallumokon; a derivált pozitív, ezért a függvény monoton nő az $(1, \infty)$ intervallumon. A második derivált negatív, ezért a függvény konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon; a második derivált pozitív, ezért a függvény konvex a $(0, \infty)$ intervallumon. Az $x = 1$ lokális minimum, inflexiós pont nincs.



Elméleti feladatok

7. Legyenek adottak az $\mathbb{R}^3$ térben az $\underline{u}_1 = (3, 2, 1)$, $\underline{u}_2 = (0, 2, 1)$, $\underline{u}_3 = (0, 0, 1)$ vektorok. A három vektor pontosan akkor alkot bázist $\mathbb{R}^3$-ban, ha minden $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ vektor egyértelműen áll elő az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ az együtthatókat.

   Írjuk fel azt a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-ra mint ismeretlenekre vonatkozó lineáris egyenletrendszert, amelyet $\underline{b}$-nek az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ lineáris kombinációjaként való kifejezését komponensenként felírva kapunk. Mi a feltétele, hogy a felírt egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen? Az egyenletrendszer megoldása nélkül ellenőrizzük ezt a feltételt a fenti $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorokra.

   Megoldás: A keresett egyenletrendszer a $\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2 + \lambda_3\underline{u}_3 = \underline{b}$ egyenlet komponenseit felírva

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 &= b_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= b_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= b_3 \end{aligned}$$

   Az egyenletrendszernek akkor van pontosan egy megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. A fenti egyenletrendszer esetén ez a determináns

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 6,$$

   ezért az adott $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ vektorok bázist alkotnak.

8. (a) Mi a függvényhatárérték definíciója egy x_0 pontban?
   (b) Mi a függvény folytonosságának definíciója egy x_0 pontban?
   (c) A definíció alapján ellenőrizzük, hogy az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

   függvénynek létezik-e a határértéke az $x_0 = 1$ pontban és ha igen, akkor mennyi? Folytonos-e a függvény ebben a pontban?

Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet.
   (b) Ld. jegyzet.
   (c) Mivel a függvény számlálója $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, ezért minden $x \neq 1$-re $f(x) = x + 2$. Mivel az $x_0 = 1$-beli határértékhez a függvénynek csak az 1-en kívüli értékeit kell figyelembe venni, ezért létezik $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$. A függvény azonban nem folytonos az $x_0 = 1$ pontban, mert nem is értelmezett.

9. (a) Mondjuk ki a Cauchy-féle középértéktételt.
   (b) A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett

$$f(x) = x, \quad g(x) = -x(x - 1), \quad h(x) = \frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{2} \right|, \quad j(x) = \operatorname{tg}(\pi x)$$

   függvények közül melyikre alkalmazható a tétel?[1] Amelyikre igen, annál keressük meg a tétel által garantáltan létező pontot is. Amelyikre nem, annál a tétel melyik feltétele sérül?

Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet.
   (b) A függvények közül nem teljesíti a tétel feltételeit $h(x)$ (mert nem differenciálható) és $j(x)$-re (mert nem értelmezett $x = 1/2$-ben). Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényekre pedig csak úgy alkalmazható a tétel, ha az $f(x)$ függvény van a nevezőben, mert $g'(x) = -2x + 1$, ami 1/2-ben 0-t vesz fel. Ebben az esetben

$$\frac{g(1) - g(0)}{f(1) - f(0)} = 0,$$

   a keresett c helyen $g'(c)/f'(c) = 0$, amelyből $c = 1/2$.

[1] Helyesen melyik függvénypárokra alkalmazható?