# Matematika EP1 vizsga megoldása, 2019. jan. 18.

**Integrálási feladatok** (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálással számítsuk ki az
$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált. Segítség: az integrandus $\operatorname{arctg} x$ tényezőjét válasszuk a parciális integrálás formulájában később deriválandó függvénynek, majd integráljuk a kapott törtfüggvényt.

   **Megoldás:** Legyen $f'(x) = x^2$ és $g(x) = \operatorname{arctg} x$, ekkor $f(x) = x^3/3$ és $g'(x) = 1/(1+x^2)$, ezért parciális integrálással
$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + c.\end{aligned}$$

2. Mennyi az
$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} + \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x + 1}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

   **Megoldás:**
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} + \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x + 1}}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\left(x^{3/2} + (3\sin x + 1)^{-1/2}\cos x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}(3\sin x + 1)^{1/2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} + \frac{2}{3}4^{1/2} - \left(0 + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. Integrálással számoljuk ki az $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ függvény grafikonjának ívhosszát az $x \in [1,2]$ intervallum felett. Segítség: a derivált négyzetre emelésekor kapott kétszeres szorzat $-1/2$, amelyhez 1-et hozzáadva újra teljes négyzetet kapunk.

   **Megoldás:** Mivel $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$, ezért
$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2.$$
   Innen az ívhossz integrálképletével a keresett ívhossz
$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{4} + 0\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

**Számítási feladatok**

4. Adottak az $\underline{u}_1 = (0,1,1)$ és $\underline{u}_2 = (0,-1,1)$ vektorokat az $\mathbb{R}^3$ térben. Ellenőrizzük, hogy merőlegesek egymásra. Az alábbiak szerint egészítsük ki ezt a két vektort egy $\underline{u}_3$ vektorral az $\mathbb{R}^3$ vektortér ún. ortogonális bázisává, azaz egy olyan vektorrendszerré, amelyben minden vektor merőleges a másik kettőre. Legyen $\underline{v} = (1,3,5)$. Bontsunk fel $\underline{v}$-t $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges komponenst bontsunk tovább $\underline{u}_2$-vel párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére. A kapott komponensek közül melyiket választhatjuk $\underline{u}_3$-nak?

   **Megoldás:** Mivel $\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2\rangle = 0 + 1(-1) + 1\cdot 1 = 0$, ezért $\underline{u}_1$ és $\underline{u}_2$ valóban merőlegesek. A $\underline{v}$-nek $\underline{u}_1$-gyel párhuzamos komponenséhez $\langle \underline{v}, \underline{u}_1\rangle = 0 + 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 8$ és $\|\underline{u}_1\|^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2$, ezért a párhuzamos komponens $\frac{8}{2}\underline{u}_1 = (0,4,4)$, a merőleges komponens pedig $\underline{v} - (0,4,4) = (1,-1,1)$. Ennek a vektornak $\underline{u}_2$-vel párhuzamos komponenséhez $\langle (1,-1,1), \underline{u}_2\rangle = 0 - 1(-1) + 1\cdot 1 = 2$ és $\|\underline{u}_2\|^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 2$, ezért a párhuzamos komponens $\frac{2}{2}\underline{u}_2 = (0,-1,1)$, a merőleges komponens pedig $(1,-1,1) - (0,-1,1) = (1,0,0)$. A kapott $(1,0,0)$ vektor tehát merőleges $\underline{u}_1$-re és $\underline{u}_2$-re is, tehát $\underline{u}_3 = (1,0,0)$ választható.

5. Mennyi az
$$a_n = \left( \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} \right)^{2n-3}$$
sorozat határértéke?

**Megoldás:** Mivel az alap határértéke $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = 1$, ezért átírjuk
$$\frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{n^2}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n^2-1}$$
alakba, ahol a második tag $1/(n^2-1) \to 0$. Innen az órán tanult tétel alapján kiszámolva az alábbi határértéket
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1}(2n-3) = 0,$$
ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$.

6. Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Mekkora legyen az egyenes szakaszok hossza és a félkörívek sugara, hogy a futópálya hossza 400 m legyen és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

**Megoldás:** Jelölje $r$ a félkörívek sugarát és $h$ az egyenes szakasz hosszát. Ekkor a futópálya teljes hossza $2r\pi + 2h = 400$, ahonnan átrendezéssel $h = 200 - r\pi$. A keresett téglalap alakú focipálya területe $2rh = 2r(200 - r\pi)$. Ennek az $f(r) = 2r(200 - r\pi) = 400r - 2r^2\pi$ kifejezésnek a maximumát keressük. Mivel $f'(r) = 400 - 4r\pi = 0$ megoldása $r = 100/\pi$ és $f''(r) = -4\pi < 0$, ezért az $f(r)$ kifejezésnek $r = 100/\pi$-ben valóban lokális maximuma van. Ekkor $h = 100$.

**Elméleti feladatok**

7. (a) Adott $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén írjuk le az $\underline{u} \times \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ vektoriális szorzat definiáló tulajdonságait.

(b) Számoljuk ki az $\underline{u} = (2, 3, -2)$ és $\underline{v} = (4, 1, 0)$ vektoriális szorzatát. Mennyi az általuk bezárt szög szinusza?

**Megoldás:**

(a) Ld. jegyzet.

(b) A vektoriális szorzat $\underline{u} \times \underline{v} = (2, -8, -10)$, amelynek hossza $\sqrt{2^2 + (-8)^2 + (-10)^2} = \sqrt{168}$. Továbbá $\|\underline{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$ és $\|\underline{v}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{17}$. A vektoriális szorzat hosszára vonatkozó definiáló tulajdonság szerint $\|\underline{u} \times \underline{v}\| = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \sin\varphi$, ahol $\varphi$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szög. Innen a példában $\sin\varphi = \sqrt{168}/17$.

8. (a) Egy $f$ differenciálható függvény deriváltjának milyen tulajdonsága esetén monoton növő ill. csökkenő az $f$ függvény egy $(a, b)$ intervallumon?

(b) Mit mondhatunk egy $f$ differenciálható függvény deriváltjáról, ha $f$ monoton növő ill. csökkenő egy $(a, b)$ intervallumon?

(c) Mit mutat az $f(x) = x^3$ függvény 0-beli viselkedése a feladat (a) pontjában kérdezett tétel megfordíthatóságáról? A választ indokoljuk.

**Megoldás:**

(a) Ha $f'(x) > 0$ ill. $f'(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

(b) $f'(x) \geq 0$ ill. $f'(x) \leq 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

(c) A feladat (a) pontjában kérdezett tétel nem megfordítható, mert $f(x) = x^3$ monoton növő függvény $\mathbb{R}$-en, mégis $f'(x) = 3x^2$, amely $x = 0$-ban 0, tehát $f'(x) > 0$ nem áll fenn minden $x \in \mathbb{R}$-re.

9. (a) Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt.

(b) Írjuk fel az $f(x) = 2x - 3$ függvény összes primitív függvényét a $[0, 1]$ intervallumon. Két különböző primitív függvény használatával számoljuk ki kétszer az
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált, majd ellenőrizzük, hogy a két esetben ugyanazt az eredményt kapjuk-e.

**Megoldás:**

(a) Ld. jegyzet.

(b) Az $f(x) = 2x - 3$ összes primitív függvénye a $[0, 1]$ intervallumon $x^2 - 3x + c$ alakban áll elő, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezen primitív függvények bármelyikével

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - 3x + c\right]_0^1 = 1 - 3 + c - (0 - 0 + c) = -2,$$

ami nem függ a $c$ konstans értékétől.