Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2018. máj. 30.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Parciális integrálással számoljuk ki az
$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Mennyi az
$$\int_6^7 \frac{2x-9}{x^2-10x+25} \, \mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Integrálással határozzuk meg annak a trapéznak a tömegközéppontját, amelynek csúcspontjai a koordinátarendszerben a $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ és $(0,1)$ pontok.

   Segítség: írjuk fel a $(0,1)$ és $(1,2)$ pontokra illeszkedő egyenes egyenletét.

Számítási feladatok

4. Jelölje S az $\mathbb{R}^3$ térben a $3x - 4y + 2z = 0$ egyenletű síkot. Ellenőrizzük, hogy a sík átmegy az origón. Írjuk fel annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges az S síkra. Bontsuk fel a tér $\underline{v} = (0, -11, 7)$ vektorát az egyenes irányába eső és az S síkba eső komponensek összegére.

5. Az a és b valós paraméterek mely értékére lesz az
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{ha } x \le 0 \\ a\frac{\ln(1+2x)}{3x} + b & \text{ha } 0 < x < 1 \\ \frac{\ln 3}{3}x - \frac{2}{3} & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$
függvény folytonos?

6. Vizsgáljuk meg az
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$
függvényt: adjuk meg az értelmezési tartományát, határozzuk meg, milyen intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, hol konvex és konkáv, hol van lokális szélsőértéke és inflexiós pontja, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Mit jelent az, hogy néhány vektor egy vektortérben bázist alkot?
   (b) A térvektorok $\mathbb{R}^3$ vektorterében bázist alkotnak-e az $(1,2,3)$, $(1,2,4)$ és $(1,3,4)$ vektorok?
   (c) A térvektorok $\mathbb{R}^3$ vektorterében bázist alkotnak-e az $(1,2,3)$, $(1,2,4)$ és $(1,2,5)$ vektorok?

8. (a) Tekintsük a $b_n = (a_n)^n$ alakú sorozatokat, azaz a b_n sorozat n-edik eleme egy n-től függő a_n alapnak az n-edik hatványa, ahol $a_n \to a > 0$. Az $a > 0$ szám különböző értékei esetén mit mondhatunk a b_n sorozat határértékéről?
   (b) Az általános állítás segíségével vagy annak megsejtéséhez számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét:
$$\left(\frac{n-3}{2n+1}\right)^n, \qquad \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n, \qquad \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n.$$

9. (a) Differenciálható függvények esetén mi a lokális minimum létezésének szükséges feltétele? Az $f(x) = x^3$ függvény példáján mutassuk meg, hogy ez a feltétel nem elégséges.
   (b) Kétszer differenciálható függvények esetén mi a lokális minimum létezésének elégséges feltétele? A $g(x) = x^4$ függvény példáján mutassuk meg, hogy ez a feltétel nem szükséges.

Minden feladat 7 pontos.