

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2018. jún. 20.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számítsuk ki az

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

határozatlan integrált.

2. Mennyi az

$$\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{6x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{x^3} + 8(\sin x)^7 \cos x \right) dx$$

határozott integrál értéke?

3. Integrálással számítsuk ki az $y = \sqrt{x-3} + 2$ félpárolba és az $y = (x+1)/2$ egyenes által határolt korlátos síkidom területét.

Számítási feladatok

4. Tekintsük a térben az

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ p \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokat, ahol $p \in \mathbb{R}$ valós paraméter.

- (a) Számoljuk ki az $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2$ vektoriális szorzatot. (Az eredmény a p paramétertől is függ.)
(b) Választható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az \underline{u}_1 és \underline{u}_2 vektorok által feszített sík merőleges legyen \underline{v} -re? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?
5. Jelölje A az \mathbb{R}^2 síkban az origó körüli $\pi/4$ szöggel való (óramutató járásával ellentétes irányú) forgatás mátrixát, B pedig az origó körüli $-\pi/4$ szöggel való (óramutató járásával megegyező irányú) forgatását. Írjuk fel az A és B mátrixokat, majd számoljuk ki az AB ill. BA mátrixszorzatokat.
6. Írjuk fel az $f(x) = 2 \sin(x/4)$ függvény érintőjének egyenletét azon $x \in [0, 2\pi]$ pontban, ahol a függvény értéke 1.

Elméleti feladatok

7. (a) Milyen esetekben és hogyan lehet összeszorozni két mátrixot? Az alábbi mátrixok közül szorozzunk össze bármely kettőt, amelyet lehet:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (b) 2×2 -es mátrixok esetén milyen tulajdonságai vannak a mátrixszorzásnak az alábbiak közül: kommutativitás, asszociativitás, egység, inverz? Írjuk le röviden, mit jelentenek az egyes tulajdonságok?
8. (a) Mit értünk egy valós számsorozat határértékén?
(b) A definíció alapján keressünk olyan küszöbindexet, amelytől kezdve az

$$a_n = \frac{4 - 3n}{n + 2}$$

sorozat eltérése a határértékétől kisebb mint $\varepsilon = 1/100$.

9. (a) Mondjuk ki az (egyszeri alkalmazásról szóló) L'Hospital-szabályt.
(b) A L'Hospital-szabály segítségével számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha az alkalmazható:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Minden feladat 7 pontos.