1

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}}_{\frac{x^2}{3}} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$u' = x^2 \quad v = \ln x$

$u = \frac{x^3}{3} \quad v' = \frac{1}{x}$

$\int u'v = uv - \int uv'$

2

$$\int_6^7 \frac{2x-9}{x^2-10x+25}\,dx = \int_6^7 \frac{2x-10}{x^2-10x+25} + \frac{1}{(x-5)^2}\,dx =$$

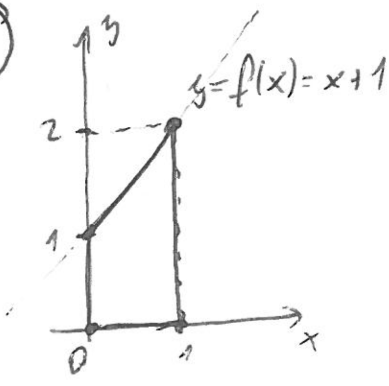
$(x^2-10x+25)' = 2x-10$

$x^2-10x+25 = (x-5)^2$

$$= \left[\underbrace{\ln(x^2-10x+25)}_{2\ln(x-5)} - \frac{1}{x-5}\right]_6^7 = \left(2\ln(7-5) - \frac{1}{7-5}\right) - \left(2\underbrace{\ln(6-5)}_{\ln 1 = 0} - \frac{1}{6-5}\right) =$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{2\ln 2 + \frac{1}{2}}}$$

3



1.) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ (Hát persze, ez a terület.)

2.) $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ (ez az y tengelyre vett nyomaték)

3.) $\int_0^1 \frac{1}{2} f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

(az x tengelyre vonatkozó nyomaték)

Ez alapján a tömegközéppont koordinátái:

$$m_x = \frac{\int_0^1 x f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = \frac{5/6}{3/2} = \frac{5}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{3} = \frac{5}{9} \quad ; \quad m_y = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx} = \frac{7/6}{3/2} = \frac{7}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{3} = \frac{7}{9}$$

A tömegközéppont $\boxed{m = \left(\frac{5}{9} ; \frac{7}{9}\right)}$

4 a.) Átmegy az origón, mert $(x,y,z)=(0,0,0)$ rajta van:

$$3x-4y-2z = 3\cdot 0 - 4\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0 \quad ✓$$

b.) A sík egy normálvektora $n=(3,-4,2)$, ez lesz az egyenesünk irányvektora. Vagyis a paraméteres egyenletrendszer

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3t+0 \\ y &= -4t+0 \\ z &= 2t \end{aligned}}$$

c.) Ha $v=(0,-11,7)=v_{\parallel}+v_{\perp}$, ahol $v_{\parallel} \parallel n$ és $v_{\perp} \perp n$,

akkor $$v_{\parallel} = \frac{v\cdot n}{n\cdot n}\,n = \frac{(0,-11,7)\cdot(3,-4,2)}{(3,-4,2)\cdot(3,-4,2)}(3,-4,2) = \frac{44+14}{9+16+4}(3,-4,2) =$$

$$\cancel{= \frac{58}{26}\,(3,-4,2) = \left(\frac{87}{13}, \frac{-116}{13}, \frac{58}{13}\right)}$$

~~$v_{\perp}$ pedig a maradék:~~

$$\cancel{v_{\perp} = (0,-11,7) - \left(\frac{87}{13}, \frac{-116}{13}, \frac{58}{13}\right) = \left(\frac{-87}{13}, \frac{-27}{13}, \frac{33}{13}\right)}$$

$$= \frac{58}{29}(3,-4,2) = 2\cdot(3,-4,2) = (6,-8,4)$$

$v_{\perp}$ pedig a maradék:

$$v_{\perp} = (0,-11,7)-(6,-8,4) = (-6,-3,3)$$

[Ellenőrzés: $v_{\perp}\cdot n = (-6,-3,3)\cdot(3,-4,2) = -18+12+6 = 0$ ✓]

⑤ A függvény az öt megadó képletek alapján mindenütt folytonos, kivéve esetleg $x=0$-ban és $x=1$-ben.

Ahhoz, hogy ezekben a pontokban is folytonos legyen:

a.) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} + b \underset{\text{L'Hospital}}{\overset{\frac{0}{0}\text{ alakú}}{=\!=\!=}} a \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{3} + b = \frac{2}{3}a + b$$

Vagyis legyen $\frac{2}{3}a + b = 0$

b.) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{\ln 3}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3} = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = a \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+2x)}{3x} + b = a\frac{\ln 3}{3} + b$$

Vagyis legyen $a\frac{\ln 3}{3} + b = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3}$

c.) Vagyis f akkor folytonos, ha (a,b) olyan, hogy

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 0 \\ \text{és} \\ \frac{\ln 3}{3}a + b = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

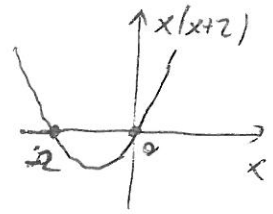
A lineáris egyenletrendszer megoldásához, pl. az 1. egyenletből $b = -\frac{2}{3}a$, ezt a 2. egyenletbe helyettesítve

$$\frac{\ln 3}{3}a - \frac{2}{3}a = \frac{\ln 3}{3} - \frac{2}{3} \Longrightarrow \boxed{a = 1,\ b = -\frac{2}{3}}$$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

1.) Értelmezési tartomány: $x \neq -1$, vagyis $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$

2.) Monotonitás: $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$



a) $f'(x) = 0 \iff x = 0$ vagy $x = -2$, ezek a kritikus pontok

b.) $f'(x) < 0 \iff -2 < x < 0$. Mivel $x \neq 0$, ez persze azt jelenti, hogy $x \in (-2,-1)$ vagy $x \in (-1,0)$: itt f csökken

c.) $f'(x) > 0 \iff x < -2 \lor x > 0$: itt f nő.

3.) Konvexitás: $f''(x) = \dfrac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{\cancel{2x^3} + \cancel{6x^2} + 6x + 2 - \cancel{2x^3} - \cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - 4x}{(x+1)^4} =$

$= \dfrac{2x+2}{(x+1)^4} = \dfrac{2(x+1)}{(x+1)^2}$

a.) $x > -1$-re $f''(x) > 0$: itt f konvex
b.) $x < -1$-re $f''(x) < 0$: itt f konkáv

inflexiós pont nincs

4.) Szélsőértékek: $x = 0$-ban $f(x) = 0$ minimumhely
$x = -2$-ben $f(x) = -4$ maximumhely

lokális

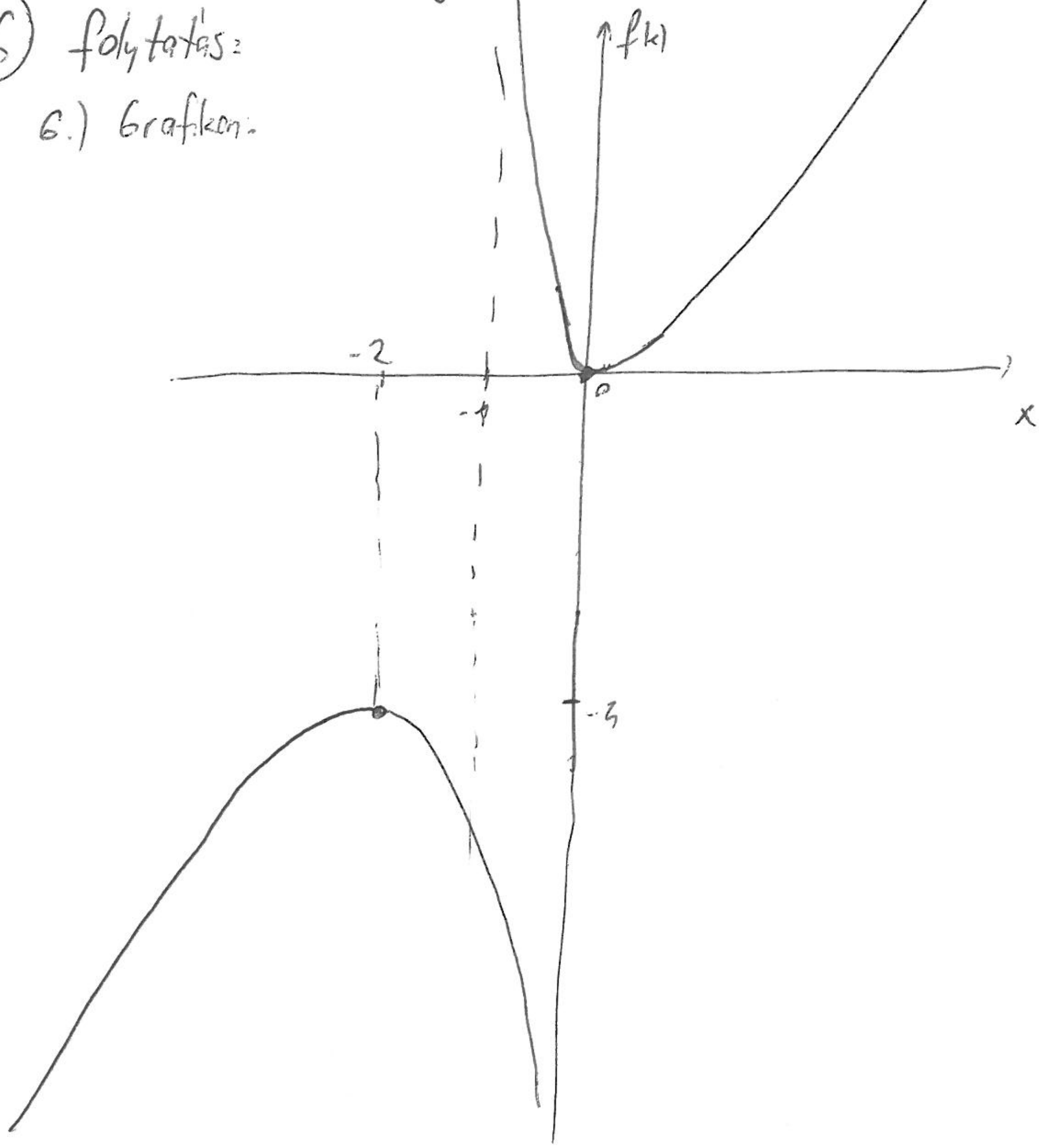
5.) Bónusz: határértékek: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{(-\infty)^2}{-\infty} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = \dfrac{1}{-0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \dfrac{1}{+0} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \dfrac{\infty^2}{\infty} = \infty$

x:	$-\infty$	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$	∞
f	$-\infty$	↗	$f=-4$	↘	$-\infty/+\infty$	↘	$f=0$	↗	$+\infty$

⑥ folytatás:

6.) Grafikon:



7.) Bemeneti értékkészlet $R_f = (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$

(7) a.) Def: Egy vektorrendszer bázis, ha generátorrendszer és lineárisan független.

b, c.) $\mathbb{R}^3$-ban minden bázis 3-elemű, és egy 3-elemű vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektorok koordinátáiból alkotott mátrix reguláris.

b.) $\det\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&3&4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Bázis

c.) $\det\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&2&5\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Nem bázis.

(8) a.) Ha $a_n \to a < 1$ (de $a > 0$), akkor $a_n^n \to 0$.

Ha $a_n \to a > 1$, akkor $a_n^n \to \infty$.

Ha $a_n \to a = 1$, akkor a_n^n határértéke lehet $[0, \infty]$-ben bármi, sőt a_n^n lehet divergens is: az számít, hogy a_n milyen gyorsan tart 1-hez.

b.) 1.) $a_n := \dfrac{n-3}{2n+1} \to \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_n^n \to 0$.

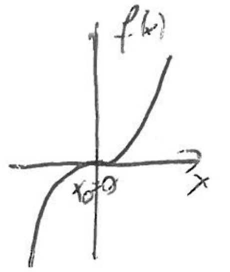
2.) $a_n := \dfrac{3n-1}{n} \to 3 > 0 \Rightarrow a_n^n \to \infty$.

3.) $a_n := \dfrac{n+1}{n+2} \to 1$, így most jobban észnél kell lenni:

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \to \frac{e}{e^2} = e^{-1}.$$

9 a.) Ha f differenciálható x_0-ban és x_0-ban lokális szélsőértéke (pl. minimuma) van, akkor $f'(x_0)=0$.

Az $f(x)=x^3$ esetén $f'(x)=3x^2$, vagyis $x_0=0$-ban ez a szükséges feltétel teljesül. Mégsincs minimum, sőt szélsőérték se:



b.) Ha f kétszer differenciálható x_0-ban, $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)>0$, akkor f-nek x_0-ban lokális minimuma van.

Az $f(x)=x^4$ esetén $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, vagyis $x_0=0$-ban $f'(x_0)=0$ de $f''(x_0)=0 \not> 0$, így ez az elégséges feltétel nem teljesül. Mégis: x_0 minimumhely: