(1)

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}\,dx \underset{u=\sqrt{x}+1}{=\!=} \int \cos u\, du = \sin u + c = \underline{\underline{\sin(\sqrt{x}+1)+c}}$$

du

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

(2)

$$I := \int_2^3 \frac{x^2-x-3}{x^2-5x+4}\,dx = \int_2^3 \frac{x^2-5x+4+4x-7}{x^2-5x+4}\,dx = \int_2^3 1 + \frac{4x-7}{(x-1)(x-4)}\,dx =$$

$$= 1 + \int_2^3 \frac{4x-7}{(x-1)(x-4)}\,dx$$

Parciális törtekre bontás: $\frac{4x-7}{(x-1)(x-4)} := \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{Ax-4A+Bx-B}{(x-1)(x-4)}$

számlálóban x együtthatója: $4 = A+B$ $\Big|$ $-3=-3A$ $\boxed{A=1}$

konstans tag : $-7=-4A-B$ $\Big|$ $\boxed{B=3}$

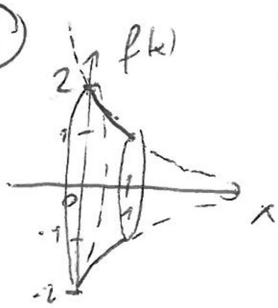
[Ellenőrzés megnyugtatásul: $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4} = \frac{x-4+3x-3}{(x-1)(x-4)} = \frac{4x-7}{x^2-5x+4}$ ✓]

Így

$$I = 1 + \int_2^3 \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}\,dx = 1 + \Big[\ln|x-1| + 3\ln|x-4|\Big]_2^3 =$$

$$= 1 + (\ln 2 + 3\underbrace{\ln 1}_{0}) - (\underbrace{\ln 1}_{0} + 3\ln 2) = \underline{\underline{1-2\ln 2}}$$

(3)



$y=1$-hez $x=1$

$y=2$-höz $x=0$, vagyis $x\in[0,1]$ darabot forgatjuk.

A forgástest térfogata $V = \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2}\,dx$

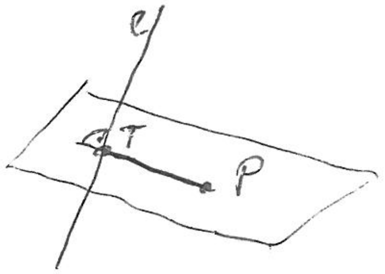
$$V = \pi\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2}\,dx = 4\pi\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = 4\pi\left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{1}\right) = \underline{\underline{2\pi}}$$

④ Egyenes: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3t \\ 2t-2 \\ 4t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ irányvektora: $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ez lesz a síkunk normálvektora: $\underline{\underline{n = (-3;2;4)}}$

Sík egyenlete: $\underline{\underline{-3x+2y+4z}} = -3\cdot 0 + 2\cdot 11 + 4\cdot 5 = \underline{\underline{42}}$

Metszéspont paramétere: $-3(7-3t)+2(2t-2)+4(4t-5)=42$



$$-21+9t+4t-4+16t-20=42$$
$$29t-45=42$$
$$29t=87$$
$$\boxed{t_0=3}$$

ebből a metszéspont: $x = 7-3t_0 = 7-9 = -2$
$y = 2t_0 - 2 = 6-2 = 4$
$z = 4t_0 - 5 = 12-5 = 7$

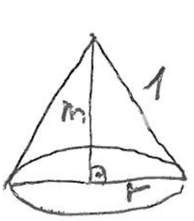
$\boxed{T=(-2,4,7)}$

Távolság $d(T,P) = \sqrt{(-2-0)^2+(4-11)^2+(7-5)^2} = \sqrt{4+49+4} = \underline{\underline{\sqrt{57}}}$

⑤ $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+3} = \dfrac{(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3})(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+3})}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+3}}$ $\underline{\underline{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}}$

$$= \frac{(\cancel{n^2}+2n)-(\cancel{n^2}+3)}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{\cancel{n}(2+\frac{3}{n})}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{1+1} = \underline{\underline{1}}$$

⑥



Legyen az alapkör sugara r, a magasság m

Feltevés/feltétel: $m^2+r^2=1^2=1 \Longrightarrow r^2=1-m^2$

Maximalizálandó $V = const \cdot r^2 \cdot m = const\cdot(1-m^2)m$

Legyen tehát $f(m) = m(1-m^2) = m-m^3 \longrightarrow max$

Kritikus pont: $f'(x) = 1-3m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ az egyetlen lehetséges maximumhely.

Itt tényleg maximum van, hiszen $f(0)=f(1)=0$, de $f(m)>0$.

7) Példák:

a.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ nincs megoldás, mert az utolsó egyenlet

$0 = 1$ ellentmondás.

b.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ a megoldás egyértelmű, mert az együttható-mátrix felső Δ, és a főátlóban nincs nulla.

Az egyetlen megoldás: $\underline{\underline{z = 0}}$

$y + z = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ $\qquad \underline{\underline{(x, y, z) = (1, 2, 0)}}$

$x + 2y - 2z = 5 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$

Persze jó lenne bármilyen

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$ ahol $a \neq 0$. Ebben az esetben az egyetlen megoldás:

$\underline{\underline{z = \frac{b}{a}}}$

$\underline{\underline{y = 2 - \frac{b}{a}}}$

$x = 5 + 2\frac{b}{a} - 2\left(2 - \frac{b}{a}\right) = \underline{\underline{1 + 4\frac{b}{a}}}$

c.) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ∞ sok megoldás van, mert az utolsó egyenlet $0 = 0$ azonosság, így z bármi lehet:

az összes megoldás $z = t \in \mathbb{R}$

$y = 2 - z = 2 - t$

$x = 5 + 2z - 2y = 5 + 2t - 2(2 - t) = 1 + 4t$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad t \in \mathbb{R}$$

(8)

(I) Def: f folytonos x_0-ban (ahol x_0 az f értelmezési tartományának egy pontja), ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tétel: ~~Ha f folytonos x_0-ban és g folytonos~~

1.) Ha f és g folytonos x_0-ban, akkor

$f+g$, $f-g$ és $f \cdot g$ is folytonos x_0-ban.

Ha ezen felül $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.

2.) Ha g folytonos x_0-ban és f folytonos $g(x_0)$-ban, akkor az $x \mapsto f(g(x))$ összetett függvény is folytonos x_0-ban.

(II) a.) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2+3x}}{x^2-3x-4}$ folytonos mindenütt, ahol értelmezve van (vagyis a nevező nem nulla), mert

$x \mapsto x$ folytonos, $x \mapsto 3$ folytonos, $x \mapsto 4$ folytonos és $x \mapsto e^x$ folytonos, és f ezekből van összerakva a fenti tételek szerinti módon.

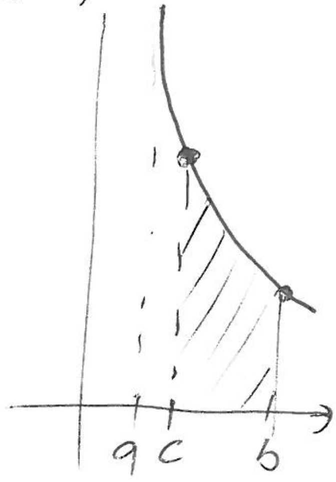
[Konkrétan: $x^2-3x-4 = (x+1)(x-4) \neq 0 \iff x \neq -1, 4$

vagyis $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$-ben folytonos.]

b.) $g(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{\sin(2x)}$ is folytonos mindenütt, ahol értelmezve van (vagyis a nevező nem nulla, vagyis $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ahol $k \in \mathbb{Z}$), mert $x \mapsto x$; $x \mapsto 2$; $x \mapsto 1$; $x \to \sin x$ folytonosak.

⑨ <u>Def:</u> Ha $f(x)$ nem korlátos „a" (jobboldali) közelében, de minden $c \in (a,b)$-re korlátos $[c,b]$-n, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x)\,dx.$$



Ez alapján

a.) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\searrow 0} \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 =$$

$$= \lim_{c\searrow 0}\left[2 - 2\sqrt{c}\right] = \underline{\underline{2}}$$

b.) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\searrow 0}\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\searrow 0}\left[\ln x\right]_c^1 = \lim_{c\searrow 0}\left[0 - \ln c\right] = \underline{\underline{\infty}}$$