① $\frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x+2} = \frac{3(x^2+2x+2)-2x-5}{x^2+2x+2} = 3-\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{3}{x^2+2x+2} =$

$= 3 - \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} - \frac{3}{(x+1)^2+1}$

$\Rightarrow \int \frac{3x^2+4x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \int 3\,dx - \int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx - 3\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx =$

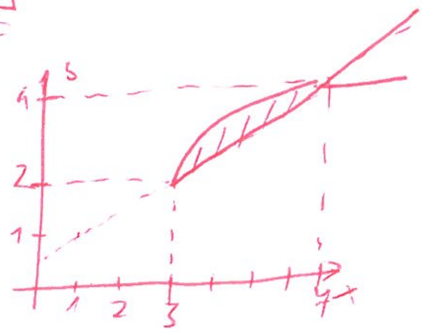
$= 3x - \ln(x^2+2x+2) - 3\arctan(x+1) + C$

② $\int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{6x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{x^3} + 8(\sin x)^7\cos x\right)dx = \int_{\pi}^{2\pi} 6x^{2+\frac12+\frac13-3} + 8(\sin x)^7(\sin x)'\,dx =$

$= 6\int_{\pi}^{2\pi} x^{-\frac16}\,dx + \left[(\sin x)^8\right]_{\pi}^{2\pi} = 6\left[\frac{x^{5/6}}{5/6}\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[0^8-0^8\right] = \frac{36}{5}\left[(2\pi)^{5/6} - \pi^{5/6}\right] =$

$= \frac{36}{5}\pi^{5/6}\left[2^{5/6}-1\right]$

③



Metszéspontok: $\sqrt{x-3}+2 = \frac{x+1}{2}$

$\sqrt{x-3} = \frac{x-3}{2}$

$x-3 = \frac{x-3}{2}\cdot\frac{x-3}{2}$

$x-3=0$	$x-3=4$
$x=3$	$x=7$
$y=2$	$y=4$

$T = \int_3^7 \sqrt{x-3}+2 - \frac{x+1}{2}\,dx = \int_3^7 \sqrt{x-3} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\,dx =$

$= \left[\frac23 (x-3)^{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac32 x\right]_3^7 = \left[\frac23 4^{3/2} - \frac{49}{4} + \frac{21}{2}\right] - \left[\frac23\cdot 0^{3/2} - \frac94 + \frac92\right] =$

$= \frac{16}{3} + \frac{-49+42+9-18}{4} = \frac{16}{3} - \frac{16}{4} = \cancel{\frac{16}{12}} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$

(*) Egyszerűbb megoldás az utolsó oldalon

4

a.) $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & p & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ p & 2 \end{vmatrix} - \underline{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & p \end{vmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -6-p \\ -1 \\ 2p+9 \end{pmatrix}}$

b.) Ehhez az kell, hogy $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2$ párhuzamos legyen $\underline{v}$-vel, vagyis legyen olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amire $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \lambda \cdot \underline{v}$, vagyis

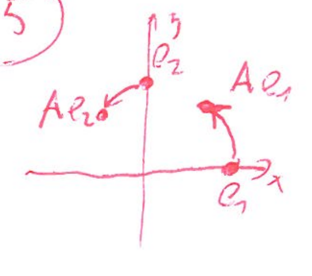
$$\begin{pmatrix} -6-p \\ -1 \\ 2p+9 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A második koordinátára ez azt jelenti, hogy $-1 = \lambda \cdot 1$, ~~vagyis~~ vagyis $\lambda = -1$. Így az marad, hogy

$$\begin{cases} -6-p = -1 \\ 2p+9 = -1 \end{cases}, \text{avagy} \begin{cases} p = -5 \\ p = -5 \end{cases}$$

IGEN, ilyen p van, éspedig a $\boxed{p = -5}$

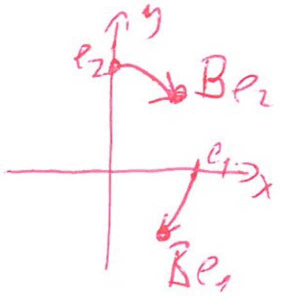
5



$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Ae_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad Ae_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}$$



$Be_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$

$Be_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$

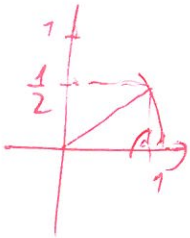
$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}}$$

Ebből persze

$$AB = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}; \quad BA = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{4}\right)=1$, vagyis $\underbrace{\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2} \text{ és } \frac{x}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$

vagyis $\frac{x}{4}=\frac{\pi}{6}=30°$

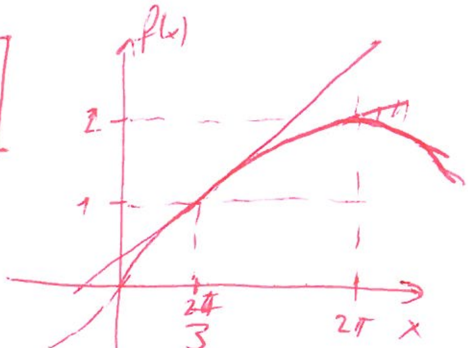


ebből $y_0=f(x_0)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$, tényleg. $\underline{x_0=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}}$

$m:=f'(x_0)=2\cos\left(\frac{x_0}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ az érintő meredeksége

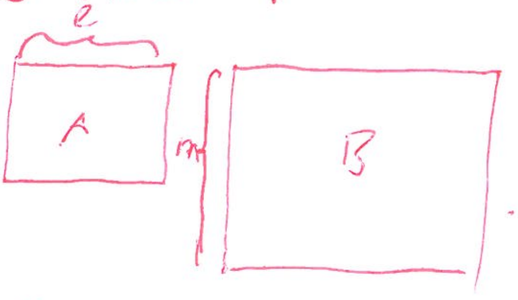
vagyis az érintő egyenlete:

$$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)=1+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}$$



7) a) Az k sorból és l oszlopból álló A mátrix és az m sorból és n oszlopból álló B mátrix

$A\cdot B$ szorzata pontosan akkor értelmes, ha $l=m$:



Konkrétan $AB=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-2&2\\0&-3\end{pmatrix}$ nem értelmes

$AC=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&-2\end{pmatrix}$ nem értelmes

ugyanígy BC, $B\cdot B$, $C\cdot A$, $C\cdot C$ sem értelmes, de

$\underline{A\cdot A}=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}9&0\\1&4\end{pmatrix}}$; $\underline{BA}=\begin{pmatrix}4&1\\-2&2\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}13&-2\\-4&-4\\-3&6\end{pmatrix}}$;

$\underline{CB}=\begin{pmatrix}5&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-2&2\\0&-3\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}18&13\end{pmatrix}}$

(M) (7) b.) • Kommutativitás nincs: általában $A \cdot B \neq B \cdot A$.

• asszociativitás van: mindig $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

• egység van: $\exists$ olyan E mátrix, hogy $\forall$ A-ra $AE = EA = A$.

Konkrétan $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• invertz nincs: általában egy A-hoz nincs olyan B, amire $AB = BA = E$.

[Csak akkor van ilyen B, ha $\det(A) \neq 0$.]

(8) a) Def: (a_n) valós számsorozatra és $A \in \mathbb{R}$-re azt mondjuk, hogy (a_n) határértéke A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > n_0$-ra $|a_n - A| < \varepsilon$.

b.) $a_n = \dfrac{4-3n}{n+2} = \dfrac{-3 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \longrightarrow -3$, éspedig $A := -3$-mal

$$|a_n - A| = |a_n + 3| = \left| \frac{4-3n}{n+2} + \frac{3n+6}{n+2} \right| = \left| \frac{10}{n+2} \right| = \frac{10}{n+2} < \varepsilon := \frac{1}{100}$$

tényleg teljesül, ha $1000 < n+2$ vagyis $998 < n$,

tehát $n_0 = 998$ jó lesz küszöbindexnek.

És persze minden 998-nál nagyobb n_0 is jó lesz.

Matematika ÉP1 3. vizsga megoldások, 2018.06.20

9 a) Tétel:

Legyen f és $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, és legyen $x_0 \in \mathbb{R}$, vagy esetleg $x_0 = \pm\infty$.

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$,

és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik.

Ekkor $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b)

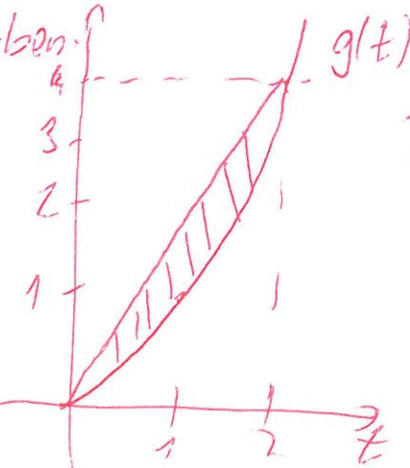
1.) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{\substack{1-\cos x \to 0 \\ x^2 \to 0}\ \text{ok}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{+\sin x}{2x} \underset{\substack{+\sin x \to 0 \\ 2x \to 0}\ \text{ok}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

2.) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{\substack{\ln x \to \infty \\ x^2 \to \infty}\ \text{ok}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = \underline{\underline{0}}$$

3.) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$-nél $\sin x \to 0, \infty$, vagyis nem alkalmazható a tétel.

Bónusz: 3-as feladat egyszerűbben.

Rajzoljuk le a szóban forgó síkidomot egy másik koordinátarendszerben:



Ebből nyilván

$$T(\text{sikidom}) = T(\Delta) - T(\text{sikidom}) =$$

$$= 4 - \int_0^2 t^2\,dt = 4 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$