Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

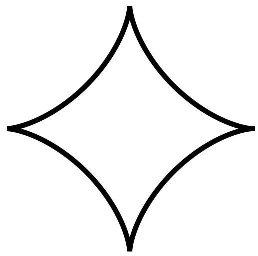
Matematika EP1 vizsga, 2019. dec. 18.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \left(\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} + 3\cosh^2 x \sinh x + xe^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

2. Számítsuk ki az
$$\int_2^3 \frac{2x^2+8x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. A karácsonyfán asztroid alakú csillagszórók lógnak. Az ábrán látható asztroid koordinátáit centiméterben az $x(t) = 5\cos^3 t$, $y(t) = 5\sin^3 t$ összefüggésekkel adhatjuk meg, ahol $t \in [0, 2\pi]$. A meggyújtott csillagszóró 6 másodperc alatt ég egy centimétert. Mennyi idő alatt ég el a teljes csillagszóró?
Segítség: Az égési időt az asztroid ívhosszából számolhatjuk az ívhossz integrálképletével. A négy egybevágó ívdarab közül a $t \in [0, \pi/2]$-vel számoljunk. A behelyettesítés után emeljünk ki mindent a gyök alatt, amit lehet, majd alkalmazzuk a szögfüggvények négyzeteire vonatkozó összefüggést. A $[0, \pi/2]$-n integrálva a fellépő szögfüggvények pozitívak, ezért a gyökvonás elvégezhető.



Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + 3z &= 2 \\ 2x - 4y + bz &= c \end{aligned}$$
egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Határozzuk meg a $b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

5. Találjunk három egymásra páronként merőleges $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektort az $\mathbb{R}^3$ térben a következőképpen. Legyen $\underline{v}_1 = (1, 2, 3)$ és $\underline{u} = (2, 3, 2)$. Bontsuk fel $\underline{u}$-t a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére, és legyen a merőleges komponens $\underline{v}_2$. Végül $\underline{v}_1$-ből és $\underline{v}_2$-ből vektoriális szorzással készítsük el $\underline{v}_3$-at.

6. Egy tűzfal mellett 800 m^2-es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap hosszúságát és szélességét, hogy a kerítés hossza a lehető legkisebb legyen?

Elméleti feladatok

7. Mit értünk azon, hogy néhány vektor bázist alkot az $\mathbb{R}^3$ vektortérben? Bázist alkotnak-e az $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, -1)$ vektorok? Mennyi az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata?

8. (a) Hogyan értelmezzük az n-edrendű érintés fogalmát? Mi egy adott f függvény x_0 pont körül felírt n-edfokú Taylor-polinomjának definiáló tulajdonsága? (Nem a képlete.)
   (b) Számoljuk ki az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény $x_0 = 0$ körüli másodfokú Taylor-polinomját.

9. Definiáljuk számsorozatok esetén a konvergens, korlátos és monoton növő tulajdonságokat. Egy tanult tétel alapján a fenti három tulajdonság közül az egyikből következik egy másik. Mondjuk ki ezt a tételt. A többi öt lehetséges következtetés a fenti tulajdonságok között hamis. Adjunk legalább két ellenpéldát, amely a következtetések hamis voltát mutatja.

Minden feladat 7 pontos.