

Név:
Neptun-kód:

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	Σ	jegy
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------

Matematika EP1 vizsga, 2020. jan. 10.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladtból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az

$$\int e^x \cdot \sin(e^x + \pi) dx$$

határozatlan integrálban végezzük el az $u = e^x$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott u változó szerinti integrált, majd a kapott függvényt fejezzük ki az x változóval.

2. Számítsuk ki az

$$\int_7^8 \frac{2x^2 - 20x + 55}{x^2 - 11x + 30} dx$$

határozott integrált.

3. Legyen $f_1(x) = x$ és $f_2(x) = \sqrt{x}$. Forgassuk meg mindkét függvény grafikonját az x tengely körül, majd integrálással határozzuk meg azt az $a > 0$ értéket, amelyre a $[0, a]$ intervallumba eső forgástest térfogata az f_1 és f_2 függvényekre azonos.

Számítási feladatok

4. Számítsuk ki az

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 5 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$$

egyenesek metszéspontját. Milyen távolságra van a metszéspont a $2x - 2y + z = 3$ síktól?

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{n-3}$$

sorozat határértékét.

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^2 e^x$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növekvő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Elméleti feladatok

7. (a) Milyen feltétel teljesülése esetén lehet két mátrixot egymással összeszorozni? Kommutatív-e a mátrixok szorzása?

(b) Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell kiszámolni a szorzatukat (megfelelő sorrendben). Írjuk ki, milyen alapműveletekkel kapjuk meg a szorzat egyes elemeit az A és B mátrixok elemeiből.

8. Mi három \mathbb{R}^3 -beli vektor vegyes szorzatának geometriai jelentése? Számoljuk ki az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorok vegyes szorzatát. Ezután számoljuk ki a vegyes szorzatot úgy is, hogy a \underline{b} és \underline{c} vektorok sorrendjét felcseréljük. Hogyan változik a vegyes szorzat és miért?

9. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. A L'Hospital-szabály segítségével számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény 0-beli Taylor-polinomjában a másodfokú tag együtthatóját az alábbiak szerint. Mivel f érintőegyenese a 0-ban $1 + x$, a függvényből ezt levonva és x^2 -tel osztva az $x \rightarrow 0$ határértékben megkapjuk a keresett együtthatót, azaz számoljuk ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

határértéket.

Minden feladat 7 pontos.