Név: ....

Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2020. jan. 17.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. A parciális integrálás módszerével számoljuk ki az
$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} \right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Koordinátarendszerben vázoljuk az $y = 1$, $y = x^2$ és $y = 4/(x-1)$ görbéket, majd integrálással számoljuk ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet a három görbe határol (de nem az $y = 1$ és $y = x^2$ által határolt korlátos síkidom). Segítség: az $y = x^2$ és $y = 4/(x-1)$ görbék egyetlen metszéspontja a $(2, 4)$ pont. A metszésponton átmenő, y tengellyel párhuzamosan egyenessel osszuk két részre a kérdéses síkidomot, és a két rész területét külön-külön számoljuk ki.

Számítási feladatok

4. Számítsuk ki az
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
mátrix inverzét.

5. Tekintsük a
$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
vektorokat. Határozzuk meg az $\underline{e}_1$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét, az $\underline{e}_2$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét és az $\underline{e}_3$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét. (A merőleges komponensekre nincs szükség.) A kapott oszlopvektorokat egy 3×3-as mátrixba egymás mellé írva állítsuk elő a $\underline{v}$ vektor egyenesére való merőleges vetítés mint lineáris transzformáció mátrixát.

6. Számoljuk ki az
$$a_n = \left(\frac{(n+2)^2 - n^2}{n} \right)^{1+4n}$$
sorozat határértékét.

Elméleti feladatok

7. (a) Adott $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén milyen az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat iránya, hossza és állása?
   (b) Legyen
   $$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter. Számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot a p paramétertől függően. Válasszuk meg p értékét úgy, hogy a kapott vektoriális szorzat merőleges legyen a $\underline{w}$ vektorra.

8. (a) Mit értünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltján az x_0 pontban?
   (b) A definíció alapján írjuk fel az $f(x) = \sin 2x$ függvény deriváltját megadó határértéket az $x_0 = 0$ pontban, majd számítsuk ki azt egy nevezetes függvényhatárérték segítségével.

9. (a) Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt.
   (b) Deriválással ellenőrizzük, hogy az $f(x) = x^2$ függvény esetén a tétel által garantált pont éppen az $[a, b]$ intervallum felezőpontja.

Minden feladat 7 pontos.