Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2020. jan. 24.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{x^2+2x-16}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{1} \Big(\sinh x\sqrt{(\cosh x)^3} + 2\pi x \cdot \sin(\pi x^2)\Big)\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Integrálással számoljuk ki annak a forgástestnek a felszínét, amelyet az $x(t) = 2t^2 + 1$, $y(t) = 4t$ paraméteresen adott görbe $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek közé eső darabjának x tengely körüli megforgatásával kapunk.

Számítási feladatok

4. Legyen $A = (2, -1, 3)$, $B = (4, 0, 5)$ és $C = (1, 2, 6)$ a tér három pontja. Írjuk fel a rájuk illeszkedő sík egyenletét. Segítség: a sík normálvektorát két a síkba eső vektor vektoriális szorzataként állítsuk elő.

5. Számoljuk ki az
$$a_n = \frac{5^{3-2n} + 7n^8 - 3\cdot 2^{n+1}}{3n^3 + 4\cdot 3^{n+5} - 10^{10-n}}$$
sorozat határértékét.

6. Írjuk fel az $f(x) = \ln(3x+2)$ függvény azon érintőjének egyenletét, amely merőleges a $2x + 3y = 4$ egyenletű egyenesre.

Elméleti feladatok

7. (a) Tegyük fel, hogy egy három egyenletből álló háromismeretlenes lineáris egyenletrendszernek az $x = 6$, $y = 5$, $z = 0$ és az $x = -2$, $y = 2$, $z = 1$ is megoldása. Mit mondhatunk ebben az esetben az együtthatómátrix determinánsáról?

   (b) Tegyük fel, hogy a Gauss-elimináció után az egyenletrendszer lépcsős alakjában az x és y változó oszlopába jutott vezéregyes, de a z változó oszlopába nem, ezért a z változó értékét egy $t \in \mathbb{R}$ szabad paraméternek választottuk. Mi lehet az egyenletrendszer általános megoldása, ha tudjuk, hogy az előző pontban megadott két megoldás kielégíti az egyenletrendszert? Segítség: az általános megoldás $x = at + b$, $y = ct + d$, $z = t$ alakú, ahol az a, b, c, d konstansokat az előző pontban megadott két megoldás segítségével határozhatjuk meg.

8. (a) Egy síkbeli lineáris transzformáció az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bázisvektort az $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$ vektorba viszi, a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bázisvektort pedig az $\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$ vektorba. Hogyan írható fel ebben az esetben a transzformáció mátrixa?

   (b) Mi annak a síkbeli lineáris transzformációnak a mátrixa, amely minden vektort az origó körül $\pi/4$ szöggel óramutató járásával ellentétes irányban elforgat?

9. (a) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy f monoton növő az (a, b) intervallumon, akkor mit mondhatunk a deriváltjáról?

   (b) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. A deriváljának milyen tulajdonsága esetén biztosítható, hogy f monoton növő legyen az (a, b) intervallumon?

   (c) Tekintsük az $f(x) = 1 + x - \cos x$ függvényt. Ellenőrizzük az előző pontok feltételeit a deriváltjára. Milyen intervallumokon növekvő ez a függvény?

Minden feladat 7 pontos.