Matematika EP1 vizsga megoldása, 2019. dec. 18.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

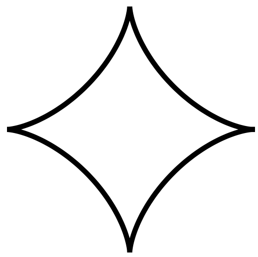
1. Mennyi az
$$\int \left(\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} + 3\cosh^2 x \sinh x + xe^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

   Megoldás:
$$\int \left(\sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} + 3\cosh^2 x \sinh x + xe^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{6}{13}x^{13/6} + \cosh^3 x - \frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_2^3 \frac{2x^2+8x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

   Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int_2^3 \frac{2x^2+8x}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(2 + \frac{2x+8}{x^2+3x-4}\right)\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(2 + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x = [2x + 2\ln|x-1|]_2^3 = 2 + 2\ln 2,$$
ahol a második egyenlőség parciális törtekre bontás nélkül az $x+4$ tényezővel való egyszerűsítéssel is megkapható.

3. A karácsonyfán asztroid alakú csillagszórók lógnak. Az ábrán látható asztroid koordinátáit centiméterben az $x(t) = 5\cos^3 t$, $y(t) = 5\sin^3 t$ összefüggésekkel adhatjuk meg, ahol $t \in [0, 2\pi]$. A meggyújtott csillagszóró 6 másodperc alatt ég egy centimétert. Mennyi idő alatt ég el a teljes csillagszóró?
Segítség: Az égési időt az asztroid ívhosszából számolhatjuk az ívhossz integrálképletével. A négy egybevágó ívdarab közül a $t \in [0, \pi/2]$-vel számoljunk. A behelyettesítés után emeljünk ki mindent a gyök alatt, amit lehet, majd alkalmazzuk a szögfüggvények négyzeteire vonatkozó összefüggést. A $[0, \pi/2]$-n integrálva a fellépő szögfüggvények pozitívak, ezért a gyökvonás elvégezhető.



   Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -15\cos^2 t \sin t$ és $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = 15\sin^2 t \cos t$, a $t \in [0, \pi/2]$ ívdarab hossza
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-15\cos^2 t\sin t)^2 + (15\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{15^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} 15\cos t\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{15}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{15}{2},\end{aligned}$$
vagyis egy ívdarab $6 \cdot \frac{15}{2} = 45$ másodpercig ég, a teljes csillagszóró pedig 90 másodpercig (egyszerre két helyen ég).

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + 3z &= 2 \\ 2x - 4y + bz &= c \end{aligned}$$
egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Határozzuk meg a $b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

   Megoldás: Gauss-eliminációval
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & b & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & b-4 & c-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b-7 & c-2 \end{array}\right),$$
azaz végtelen sok megoldás $b = 7$ és $c = 2$ esetén van.

5. Találjunk három egymásra páronként merőleges $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektort az $\mathbb{R}^3$ térben a következőképpen. Legyen $\underline{v}_1 = (1,2,3)$ és $\underline{u} = (2,3,2)$. Bontsuk fel $\underline{u}$-t a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos és rá merőleges komponensek összegére, és legyen a merőleges komponens $\underline{v}_2$. Végül $\underline{v}_1$-ből és $\underline{v}_2$-ből vektoriális szorzással készítsük el $\underline{v}_3$-at.

   Megoldás: Mivel $\langle \underline{u}, \underline{v}_1 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 14$ és $\|\underline{v}_1\|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, ezért $\underline{u}$-nak a $\underline{v}_1$-gyel párhuzamos komponense $\frac{14}{14}\underline{v}_1 = \underline{v}_1$. A merőleges komponens $\underline{v}_2 = \underline{u} - \underline{v}_1 = (1,1,-1)$. Innen vektoriális szorzással

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Egy tűzfal mellett 800 m^2-es téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap hosszúságát és szélességét, hogy a kerítés hossza a lehető legkisebb legyen?

   Megoldás: Legyen a tűzfalra merőleges oldal hossza x méter, ekkor a másik oldal hossza $800/x$ méter. A kerítés hossza x függvényében $f(x) = 2x + 800/x$. Ennek lokális minimuma az $f'(x) = 2 - 800/x^2 = 0$ egyenlet megoldásában lehet csak, azaz $x^2 = 400$, vagyis a pozitivitás miatt $x = 20$. Mivel $f''(x) = 1600/x^3$, ami minden $x > 0$ esetén pozitív, a megtalált $x = 20$ megoldás valóban lokális és egyben globális minimum.

Elméleti feladatok

7. Mit értünk azon, hogy néhány vektor bázist alkot az $\mathbb{R}^3$ vektortérben? Bázist alkotnak-e az $(1,1,1)$, $(0,1,2)$, $(1,0,-1)$ vektorok? Mennyi az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata?

   Megoldás: Egy vektortérben néhány vektor bázist alkot, ha a tér minden vektora egyértelműen előáll a lineáris kombinációjukként. Mivel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

   ami onnan is látszik, hogy a második két sor összege az első, az adott vektorok nem alkotnak bázist. Az általuk feszített paralelepipedon térfogata 0.

8. (a) Hogyan értelmezzük az n-edrendű érintés fogalmát? Mi egy adott f függvény x_0 pont körül felírt n-edfokú Taylor-polinomjának definiáló tulajdonsága? (Nem a képlete.)

   (b) Számoljuk ki az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény $x_0 = 0$ körüli másodfokú Taylor-polinomját.

   Megoldás:

   (a) Ha a deriváltak n-edrendig megegyeznek, akkor a két függvény n-edrendben érinti egymást. A Taylor-polinom az adott n-szer differenciálható f függvényt x_0-ban n-edrendben érintő legfeljebb n-edfokú polinom. (Pontosan egy ilyen létezik.)

   (b) Mivel $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ és $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, ill. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ és $f''(0) = -2$, ezért a keresett Taylor-polinom $1 - x^2$.

9. Definiáljuk számsorozatok esetén a konvergens, korlátos és monoton növő tulajdonságokat. Egy tanult tétel alapján a fenti három tulajdonság közül az egyikből következik egy másik. Mondjuk ki ezt a tételt. A többi öt lehetséges következtetés a fenti tulajdonságok között hamis. Adjunk legalább két ellenpéldát, amely a következtetések hamis voltát mutatja.

   Megoldás: Definíciókat ld. jegyzet. Tanult tétel alapján konvergens sorozat mindig korlátos. Ellenpéldák: korlátos sorozat nem konvergens $(0,1,0,1,\dots)$, konvergens sorozat nem monoton $((-1)^n/n \to 0)$, monoton sorozat nem konvergens $(1,2,3,4,\dots \to \infty)$, korlátos sorozat nem monoton $(0,1,0,1,\dots)$, monoton sorozat nem korlátos $(1,2,3,4,\dots)$.

Minden feladat 7 pontos.