Matematika EP1 vizsga megoldása, 2020. jan. 3.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \frac{3x^3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

   Megoldás: Maradékos polinomosztással majd a nevező deriváltjának kiemelésével a számlálóban
$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(3x-6+3\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{6}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}x^2-6x+\ln|x^2+2x+2|+6\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}x^2-6x+\ln(x^2+2x+2)+6\,\mathrm{arctg}(x+1)+c.\end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_0^\pi \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

   Megoldás: Mivel mindkét integrandus $(f(x))^\alpha f'(x)$ alakú, ezért
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}-\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)\mathrm{d}x &= \left[2(\sin x)^{1/2}-\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}\right]_0^\pi\\ &= 0-\frac{3}{4}(\pi^2+1)^{2/3}-\left(0-\frac{3}{4}\right)\\ &= \frac{3}{4}\left(1-(\pi^2+1)^{2/3}\right)\end{aligned}$$

3. Integrálással határozzuk meg az $f(x)=2x-x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt korlátos tartomány tömegközépponjának koordinátáit.

   Megoldás: Az f függvény és az x tengely metszéspontjai az $f(x)=0$ egyenlet megoldásai, azaz $x=0$ és $x=2$. Így a tömegközéppont meghatározásához az alábbi integrálok kiszámítása szükséges:
$$\begin{aligned}\int_0^2 x(2x-x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{16}{3}-4-(0-0)=\frac{4}{3},\\ \int_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}-(0-0)=\frac{4}{3},\\ \int_0^2 (2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}-(0-0+0)=\frac{16}{15},\end{aligned}$$
ezért a tömegközéppont koordinátái $x=1$ és $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}/\frac{4}{3}=\frac{2}{5}$.

Számítási feladatok

4. Számoljuk ki a
$$\lim_{x\to 0}\frac{10^x-2^x}{3x^2-x}$$
függvényhatárértéket.

   Megoldás:
$$\lim_{x\to 0}\frac{10^x-2^x}{3x^2-x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x}{3x-1}\cdot\frac{5^x-1}{x}\right)=-1\cdot\ln 5=-\ln 5,$$
ahol a zárójelben lévő első tört határértékét behelyettesítéssel, a másodikét nevezetes határértékként kapjuk.

5. Jelölje A annak az $\mathbb{R}^2$ síkbeli lineáris transzformációnak a mátrixát, amely az $y = x$ egyenletű egyenesre tükröz. Legyen B az x tengelyre tükrözés mátrixa. Ekkor a BA mátrixszorzat annak a lineáris transzformációnak a mátrixa, amelyet először az A-nak majd a B-nek megfelelő transzformáció egymás után alkalmazásával kapunk. Számítsuk ki a BA mátrixszorzatot, majd olvassuk le, milyen transzformáció mátrixa ez.

   Megoldás: Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bázisvektorok képeiből mint oszlopvektorokból képzett mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

   ahol a BA mátrix mátrixszorzással adódik. A BA mátrix az origó körüli $-\pi/2$ szöggel való forgatás mátrixa.

6. Hol metszi az x tengelyt az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = \pi/4$ pontban húzott érintője?

   Megoldás: Mivel $f'(x) = -\sin x$, ezért $f(x_0) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ és $f'(x_0) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$. Innen az érintőegyenes egyenlete $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4})$, amelybe $y = 0$ behelyettesítéssel és átrendezéssel $x = 1 + \frac{\pi}{4}$.

Elméleti feladatok

7. (a) Adjuk meg a Gauss-elimináció megengedett lépéseit. Tegyük fel, hogy az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Hogyan változik ekkor az együtthatómátrix determinánsa az egyes lépések elvégzésekor?

   (b) A

$$\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ x + y &= -2 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert mátrixos alakban felírva végezzünk el egyet-egyet a megengedett lépésekből. A lépéseket úgy válasszuk meg, hogy azok elvégzése után leolvashassuk az egyenletrendszer megoldását. Írjuk fel a megoldást. Minden elvégzett lépésnél ellenőrizzük az együtthatómátrix determinánsának változását.

   Megoldás:

   (a) Megengedett lépések: sorcsere (determináns előjelet vált), egy sor szorzása $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számmal (determináns λ-val szorzódik), egyik sor λ-szorosának hozzáadása egy másikhoz, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ (determináns nem változik).

   (b) Az egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

   ahol az együtthatómátrix determinánsa 3. Sorcsere után

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

   ahol az együtthatómátrix determinánsa -3. Az első sor -2-szeresét a másodikhoz adva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

   ahol az együtthatómátrix determinánsa -3. A második sort $-\frac{1}{3}$-dal szorozva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

   ahol az együtthatómátrix determinánsa 1, és ahonnan a megoldás $y = -1$ és $x = -1$.

8. Számoljuk ki az

$$a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$$

   sorozat határértékét, majd keressük meg azt a küszöbindexet, amelytől kezdve a sorozat elemeinek a határértéktől való eltérés $\varepsilon = 0{,}05$-nál kisebb.

Megoldás: A sorozat határértéke $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, ezért a

$$\left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kielégítő n-eket keressük. Közös nevezőre hozással a bal oldal $\left|\frac{-5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1}$, így $\frac{5}{n+1} < \varepsilon$, tehát $n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$, vagyis $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$, ami az adott $\varepsilon = 0{,}05$ érték behelyettesítésével az $n > 99$ egyenlőtlenségre vezet.

9. (a) Milyen differenciálási szabályból és hogyan következik a parciális integrálás képlete?

   (b) Alkalmazzuk a parciális integrálást az

$$\int (2x+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x$$

   integrál kiszámolására.

Megoldás:

(a) A szorzat deriválási szabályából következik, amely

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ezt integrálva

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, ahonnan átrendezéssel kapjuk a parciális integrálás

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

képletét.

(b) Az $f'(x) = e^{3x}$ és $g(x) = 2x+1$ választással, amelyből $f(x) = \frac{e^{3x}}{3}$ és $g'(x) = 2$ következik,

$$\int (2x+1)e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{3}(2x+1) - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{3}(2x+1) - \frac{2}{9}e^{3x} + c.$$

Minden feladat 7 pontos.