Matematika EP1 vizsga megoldása, 2020. jan. 10.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int e^x \cdot \sin(e^x + \pi)\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrálban végezzük el az $u = e^x$ helyettesítést, számítsuk ki a kapott u változó szerinti integrált, majd a kapott függvényt fejezzük ki az x változóval.

Megoldás: Mivel az változócserét megadó $x \mapsto u$ függvény deriváltja $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x$, ezért
$$\int e^x \cdot \sin(e^x + \pi)\,\mathrm{d}x = \int \sin(u+\pi) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(u+\pi)\,\mathrm{d}u = -\cos(u+\pi) + c = -\cos(e^x + \pi) + c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_7^8 \frac{2x^2 - 20x + 55}{x^2 - 11x + 30}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

Megoldás: Maradékos polinomosztással majd parciális törtekre bontással
$$\begin{aligned}
\int_7^8 \frac{2x^2 - 20x + 55}{x^2 - 11x + 30}\,\mathrm{d}x &= \int_7^8 \left(2 + \frac{2x-5}{x^2 - 11x + 30}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_7^8 \left(2 - \frac{5}{x-5} + \frac{7}{x-6}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[2x - 5\ln|x-5| + 7\ln|x-6|\right]_7^8 \\
&= 16 - 5\ln 3 + 7\ln 2 - (14 - 5\ln 2 + 7\ln 1) \\
&= 2 - 5\ln 3 + 12\ln 2.
\end{aligned}$$

3. Legyen $f_1(x) = x$ és $f_2(x) = \sqrt{x}$. Forgassuk meg mindkét függvény grafikonját az x tengely körül, majd integrálással határozzuk meg azt az $a > 0$ értéket, amelyre a $[0, a]$ integvallumba eső forgástest térfogata az f_1 és f_2 függvényekre azonos.

Megoldás: A forgástest térfogatának integrálképlete alapján az f_1 forgatásával kapott test térfogata
$$\pi \int_0^a (f_1(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \pi \frac{a^3}{3}.$$
Hasonlóan az f_2 forgatásával kapott térfogat
$$\pi \int_0^a (f_2(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^a x\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi \frac{a^2}{2}.$$
A két térfogat akkor egyenlő, ha $a = 3/2$.

Számítási feladatok

4. Számítsuk ki az
$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 5 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$$
egyenesek metszéspontját. Milyen távolságra van a metszéspont a $2x - 2y + z = 3$ síktól?

Megoldás: A keresett metszéspont $(-3, 1, 2)$, amely az első egyenes $t = -2$ és a második egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja. A sík egyenletét $2x - 2y + (z - 3) = 0$ alakban felírva a metszéspont és a sík előjeles távolsága
$$\frac{2 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 + (2 - 3)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-9}{3} = -3,$$
azaz a távolság 3.

5. Számoljuk ki az

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n-3}$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Mivel az alap $\frac{2n}{2n-1} \to 1$, ezért a sorozatot így írhatjuk:

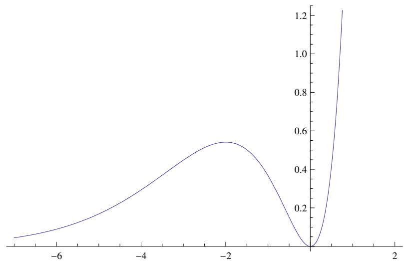
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{n-3} \to e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{2n-1}} = e^{1/2}.$$

6. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^2 e^x$ függvényt. Határozzuk meg az értelmezési tartományát, készítsünk táblázatot, mely intervallumokon monoton növő ill. csökkenő, konvex ill. konkáv a függvény, hol vannak a lokális szélsőértékei és inflexiós pontjai. Végül vázoljuk a függvény grafikonját.

Megoldás: A függvény $\mathbb{R}$-en értelmezett. Deriváltjai $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, amely az $x = 0$ és $x = -2$ pontokban 0, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$, amely az $x = -2 \pm \sqrt{2}$ pontokban 0.

	$(-\infty, -2-\sqrt{2})$	$-2-\sqrt{2}$	$(-2-\sqrt{2}, -2)$	-2	$(-2, -2+\sqrt{2})$	$-2+\sqrt{2}$	$(-2+\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	$\nearrow, \cup$	infl.	$\nearrow, \cap$	lok. max.	$\searrow, \cap$	infl.	$\searrow, \cup$	lok. min.	$\nearrow, \cup$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

A függvény grafikonja:



Elméleti feladatok

7. (a) Milyen feltétel teljesülése esetén lehet két mátrixot egymással összeszorozni? Kommutatív-e a mátrixok szorzása?

   (b) Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   mátrixok példáján mutassuk be, hogyan kell kiszámolni a szorzatukat (megfelelő sorrendben). Írjuk ki, milyen alapműveletekkel kapjuk meg a szorzat egyes elemeit az A és B mátrixok elemeiből.

Megoldás:

(a) Akkor szorozhatók össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával. A mátrixszorzás nem kommutatív.

(b) Az eredmény

$$BA = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ -2 & 7 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ahol az egyes elemek az alábbiak szerint adódnak az A és B mátrixok elemeiből: $8 = 4 \cdot 2 + (-4) \cdot 0$; $-16 = 4 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3$; $-2 = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0$; $7 = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 3$; $-4 = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 0$; $11 = (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3$.

8. Mi három $\mathbb{R}^3$-beli vektor vegyes szorzatának geometriai jelentése? Számoljuk ki az

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorok vegyes szorzatát. Ezután számoljuk ki a vegyes szorzatot úgy is, hogy a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok sorrendjét felcseréljük. Hogyan változik a vegyes szorzat és miért?

Megoldás: A vegyes szorzat értéke a három vektor által feszített paralelepipedon előjeles térfogata. A két vegyes szorzat

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10, \qquad \underline{a}\,\underline{c}\,\underline{b} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

A két vegyes szorzat egymás ellentettje, mert ugyanazt a paralelepipedont feszítik, csak a vektorok az első esetben balrendszert, a másodikban jobbrendszert alkotnak. Mindez abból is látszik, hogy a két vegyes szorzatot megadó determináns egymásból két sor cseréjével kapható.

9. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. A L'Hospital-szabály segítségével számoljuk ki az $f(x) = e^x$ függvény 0-beli Taylor-polinomjában a másodfokú tag együtthatóját az alábbiak szerint. Mivel f érintőegyenese a 0-ban $1 + x$, a függvényből ezt levonva és x^2-tel osztva az $x \to 0$ határértékben megkapjuk a keresett együtthatót, azaz számoljuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$$

határértéket.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Minden feladat 7 pontos.