Matematika EP1 vizsga megoldása, 2020. jan. 17.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. A parciális integrálás módszerével számoljuk ki az

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált.

Megoldás: Legyen $f'(x) = x^2$ és $g(x) = \ln x$, ekkor $f(x) = x^3/3$ és $g'(x) = 1/x$, amellyel

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} \right) \mathrm{d}x$$

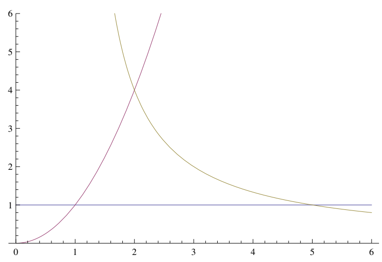
határozott integrált.

Megoldás: Az integrandus második tagját maradékos polinomosztással átírva

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} \right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + x - \ln|x+1| \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + 1 - \ln 2 - (-1 + 0 - 0) \\
&= \frac{3}{2} - \ln 2.
\end{aligned}$$

3. Koordinátarendszerben vázoljuk az $y = 1$, $y = x^2$ és $y = 4/(x-1)$ görbéket, majd integrálással számoljuk ki annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet a három görbe határol (de nem az $y = 1$ és $y = x^2$ által határolt korlátos síkidom). Segítség: az $y = x^2$ és $y = 4/(x-1)$ görbék egyetlen metszéspontja a $(2, 4)$ pont. A metszésponton átmenő, y tengellyel párhuzamosan egyenessel osszuk két részre a kérdéses síkidomot, és a két rész területét külön-külön számoljuk ki.

Megoldás:



Az ábrán látható a keresett síkidom. Az $y = 1$ és $y = x^2$ görbék metszéspontjai $(-1, 1)$ és $(1, 1)$, amelyek közül az utóbbi érdekes, az $y = 1$ és $y = 4/(x-1)$ görbék az $(5, 1)$ pontban metszik egymást. A síkidom területe integrállal felírva:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x + \int_2^5 \left(\frac{4}{x-1} - 1 \right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 + \left[4 \ln|x-1| - x\right]_2^5 \\
&= \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 4 \ln 4 - 5 - (0 - 2) \\
&= 4 \ln 4 - \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Számítási feladatok

4. Számítsuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét.

Megoldás:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1/2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük a

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokat. Határozzuk meg az $\underline{e}_1$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét, az $\underline{e}_2$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét és az $\underline{e}_3$ vektornak a $\underline{v}$ vektorral párhuzamos komponensét. (A merőleges komponensekre nincs szükség.) A kapott oszlopvektorokat egy 3×3-as mátrixba egymás mellé írva állítsuk elő a $\underline{v}$ vektor egyenesére való merőleges vetítés mint lineáris transzformáció mátrixát.

Megoldás: Mivel $\|\underline{v}\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$ és $\langle \underline{e}_1, \underline{v} \rangle = 2$, ezért $\underline{e}_1$-nek $\underline{v}$-vel párhuzamos komponense $\frac{2}{6}\underline{v} = \frac{1}{3}\underline{v}$. $\langle \underline{e}_2, \underline{v} \rangle = 1$, ezért $\underline{e}_2$-nek $\underline{v}$-vel párhuzamos komponense $\frac{1}{6}\underline{v}$. $\langle \underline{e}_3, \underline{v} \rangle = -1$, ezért $\underline{e}_3$-nek $\underline{v}$-vel párhuzamos komponense $-\frac{1}{6}\underline{v}$. Így a $\underline{v}$ vektor egyenesére vetítés mátrixa

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Számoljuk ki az

$$a_n = \left(\frac{(n+2)^2 - n^2}{n} \right)^{1+4n}$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Mivel az alap határértéke

$$\frac{(n+2)^2 - n^2}{n} = \frac{4n+4}{n} = 4 + \frac{4}{n} \to 4 > 1,$$

ezért $a_n \to \infty$.

Elméleti feladatok

7. (a) Adott $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok esetén milyen az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat iránya, hossza és állása?

   (b) Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter. Számoljuk ki az $\underline{u} \times \underline{v}$ vektoriális szorzatot a p paramétertől függően. Válasszuk meg p értékét úgy, hogy a kapott vektoriális szorzat merőleges legyen a $\underline{w}$ vektorra.

   Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet.

   (b)

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 \\ -3a+2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

   amely pontosan akkor merőleges $\underline{w}$-re, ha a skaláris szorzatuk 0, azaz ha $2a + 1 - 3a + 2 - 7 = 0$, ahonnan $a = -4$.

8. (a) Mit értünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltján az x_0 pontban?

   (b) A definíció alapján írjuk fel az $f(x) = \sin 2x$ függvény deriváltját megadó határértéket az $x_0 = 0$ pontban, majd számítsuk ki azt egy nevezetes függvényhatárérték segítségével.

   Megoldás:

   (a) Ld. jegyzet.

   (b)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h - \sin 2 \cdot 0}{h - 0} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{h} = 2.$$

9. (a) Mondjuk ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   (b) Deriválással ellenőrizzük, hogy az $f(x) = x^2$ függvény esetén a tétel által garantált pont éppen az $[a, b]$ intervallum felezőpontja.

Megoldás:

(a) Ld. jegyzet.

(b) Mivel $f'(x) = 2x$, ezért a függvény deriváltja az $(a+b)/2$ felezőpontban $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = a + b$. Másrészt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a,$$

ami megegyezik a derivált értékével a felezőpontban.