Matematika EP1 vizsga megoldása, 2020. jan. 24.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Számoljuk ki az
$$\int \frac{x^2+2x-16}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrált.

   Megoldás: Maradékos polinomosztással
$$\int \frac{x^2+2x-16}{x^2-16}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{2x}{x^2-16}\right)\mathrm{d}x = x+\ln|x^2-16|+c.$$

2. Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{1}\left(\sinh x\sqrt{(\cosh x)^3}+2\pi x\cdot\sin(\pi x^2)\right)\mathrm{d}x$$
határozott integrált.

   Megoldás: Észrevéve, hogy mindkét tagban az összetett függvény belső függvényének deriváltja a másik szorzótényező
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(\sinh x\sqrt{(\cosh x)^3}+2\pi x\cdot\sin(\pi x^2)\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{5}(\cosh x)^{5/2}-\cos(\pi x^2)\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{2}{5}(\cosh 1)^{5/2}-(-1)-\left(\frac{2}{5}(\cosh(-1))^{5/2}-(-1)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$
mert a $\cosh x$ függvény páros, tehát $\cosh 1=\cosh(-1)$.

3. Integrálással számoljuk ki annak a forgástestnek a felszínét, amelyet az $x(t)=2t^2+1$, $y(t)=4t$ paraméteresen adott görbe $t=0$ és $t=1$ paraméterértékek közé eső darabjának x tengely körüli megforgatásával kapunk.

   Megoldás: Mivel $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=4t$ és $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=4$, ezért a felszín paraméteres integrálképletével a keresett felszín értéke
$$2\pi\int_0^1 4t\sqrt{(4t)^2+4^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\int_0^1 32t\sqrt{16t^2+16}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(16t^2+16)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(32^{3/2}-16^{3/2})$$

Számítási feladatok

4. Legyen $A=(2,-1,3)$, $B=(4,0,5)$ és $C=(1,2,6)$ a tér három pontja. Írjuk fel a rájuk illeszkedő sík egyenletét. Segítség: a sík normálvektorát két a síkba eső vektor vektoriális szorzataként állítsuk elő.

   Megoldás: Mivel $AB=(2,1,2)$ és $AC=(-1,3,3)$ a síkba eső két vektor, a vektoriális szorzatuk választható a keresett sík normálvektorának:
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-8\\7\end{pmatrix}.$$
   Ezen normálvektor és a három közül bármelyik pont segítségével a sík egyenlete $-3x-8y+7z=23$.

5. Számoljuk ki az
$$a_n=\frac{5^{3-2n}+7n^8-3\cdot 2^{n+1}}{3n^3+4\cdot 3^{n+5}-10^{10-n}}$$
sorozat határértékét.

   Megoldás:
$$a_n=\frac{5^{3-2n}+7n^8-3\cdot 2^{n+1}}{3n^3+4\cdot 3^{n+5}-10^{10-n}} = \frac{2^n}{3^n}\cdot\frac{5^{3-2n}/2^n+7n^8/2^n-6}{3n^3/3^n+4\cdot 3^5-10^{10-n}/3^n}\to 0,$$
   mert a kiemelés utáni alak első tényezője 0-hoz tart, a második tényező számlálója -6-hoz, nevezője pedig $4\cdot 3^5$-hez tart.

6. Írjuk fel az $f(x) = \ln(3x+2)$ függvény azon érintőjének egyenletét, amely merőleges a $2x+3y=4$ egyenletű egyenesre.

   Megoldás: Az adott egyenes meredeksége $-2/3$, ezért a keresett érintőé $3/2$. Az $f'(x) = \frac{3}{3x+2} = 3/2$ egyenelet megoldása adja azt az x_0 helyet, ahol az érintőegyenest felírjuk. Az egyenlet megoldásával $x_0 = 0$ adódik, ahol a függvény értéke $f(0) = \ln 2$, ezért a keresett érintő egyenlete $y = \frac{3}{2}x + \ln 2$.

Elméleti feladatok

7. (a) Tegyük fel, hogy egy három egyenletből álló háromismeretlenes lineáris egyenletrendszernek az $x=6$, $y=5$, $z=0$ és az $x=-2$, $y=2$, $z=1$ is megoldása. Mit mondhatunk ebben az esetben az együtthatómátrix determinánsáról?

   (b) Tegyük fel, hogy a Gauss-elimináció után az egyenletrendszer lépcsős alakjában az x és y változó oszlopába jutott vezéregyes, de a z változó oszlopába nem, ezért a z változó értékét egy $t \in \mathbb{R}$ szabad paraméternek választottuk. Mi lehet az egyenletrendszer általános megoldása, ha tudjuk, hogy az előző pontban megadott két megoldás kielégíti az egyenletrendszert? Segítség: az általános megoldás $x = at+b$, $y = ct+d$, $z = t$ alakú, ahol az a, b, c, d konstansokat az előző pontban megadott két megoldás segítségével határozhatjuk meg.

   Megoldás:

   (a) Mivel az egyenletrendszernek két különböző megoldása is van, ezért csak végtelen sok megoldása lehet. Így az együtthatómátrix determinánsa 0.

   (b) A segítségben megadott $x = at+b$, $y = ct+d$, $z = t$ alakba az $x=6$, $y=5$, $z=0$ megoldást behelyettesítve kapjuk, hogy $b=6$ és $d=5$. Ezt felhasználva és az $x=-2$, $y=2$, $z=1$ megoldást is behelyettesítve $a=-8$ és $c=-3$ adódik, azaz az általános megoldás $x=-8t+6$, $y=-3t+5$, $z=t$

8. (a) Egy síkbeli lineáris transzformáció az $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bázisvektort az $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$ vektorba viszi, a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bázisvektort pedig az $\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$ vektorba. Hogyan írható fel ebben az esetben a transzformáció mátrixa?

   (b) Mi annak a síkbeli lineáris transzformációnak a mátrixa, amely minden vektort az origó körül $\pi/4$ szöggel óramutató járásával ellentétes irányban elforgat?

   Megoldás:

   (a) A transzformáció mátrixa ekkor $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

   (b) Az adott forgatás mátrixa $\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$.

9. (a) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy f monoton növő az (a, b) intervallumon, akkor mit mondhatunk a deriváltjáról?

   (b) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. A deriváljának milyen tulajdonsága esetén biztosítható, hogy f monoton növő legyen az (a, b) intervallumon?

   (c) Tekintsük az $f(x) = 1 + x - \cos x$ függvényt. Ellenőrizzük az előző pontok feltételeit a deriváltjára. Milyen intervallumokon növekvő ez a függvény?

   Megoldás:

   (a) Ha f monoton növő az (a, b) intervallumon, akkor $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$-re.

   (b) Ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$-re, akkor f monoton növő legyen az (a, b) intervallumon.

   (c) Mivel $f'(x) = 1 - \sin x$, amelyre $f'(x) \geq 0$, de egyenlőség áll fenn $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$-re ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ezért a függvény monoton növő a $(\frac{3}{2}\pi + k2\pi, \frac{3}{2}\pi + (k+1)2\pi)$ alakú intervallumokon minden $k \in \mathbb{Z}$-re. Mivel ezek az intervallumok a végpontjaikban összeérnek, a monoton növő tulajdonság fennáll a teljes való számegyenesen.