Név: ....
Neptun-kód: ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2019. máj. 28.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Az
$$\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x$$
integrálban végezzük el az $u=\sqrt{x+2}$ helyettesítést, számoljuk ki a kapott integrált az u változóval, majd az eredményt írjuk át az eredeti x változóval kifejezve.

2. Mennyi az
$$\int_0^1 \frac{x^2+x-3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$$
határozott integrál értéke?

3. Homogén lemezből olyan síkidomot vágtunk ki, amelyet a koordinátarendszerben az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonjának 0 és π közé eső darabja és az x tengely határolnak. Integrálással számítsuk ki a síkidom tömegközéppontjának koordinátáit. Segítség: az $x\sin x$ függvényt parciálisan integráljuk, a $\sin^2(x)$ függvény integrálásához pedig használjuk a képletgyűjteményben szereplő összefüggést.

Számítási feladatok

4. Tekintsük az
$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$
mátrixokat.
   (a) Amelyik mátrixnak létezik az inverze, azt számoljuk ki.
   (b) A kilenc lehetséges XY mátrixszorzás közül, ahol X és Y a fenti három mátrix valamelyike (X és Y azonos is lehet), számoljuk ki azokat, amelyek értelmezettek.

5. Tekintsük a térben a $P=(5,-4,4)$ pontot és az $x-2y+2z=3$ síkot. Számoljuk ki a távolságukat kétféleképpen.
   (a) Válasszuk ki a sík egy tetszőleges (x_0,y_0,z_0) pontját. Írjuk fel a P pontból az (x_0,y_0,z_0) pontba mutató vektort, majd számoljuk ki a kapott vektornak a sík normálvektorával párhuzamos komponensét. (A merőleges komponensre nincs szükség.) A párhuzamos komponens hossza P és a sík távolsága.
   (b) Használjuk a képletgyűjteményben szereplő formulát a pont és sík távolságára, amelyben szintén kiválasztjuk a sík egy (x_0,y_0,z_0) pontját. Vegyük észre, hogy a formulába behelyettesítéssel ugyanazt a számolást végezzük el, mint a feladat első részében.

6. Írjuk fel az $f(x)=3\arcsin(2x-1)+1$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0=1/2$ pontban.

Elméleti feladatok

7. (a) Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^3$ tér egy lineáris leképezéséről tudjuk, hogy mik az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisának képei a leképezésnél. Hogyan írjuk fel ezen képvektorok segítségével a leképezés mátrixát? A leképezés mátrixának segítségével hogyan számoljuk ki egy tetszőleges vektor képét?
   (b) Tekintsük azt a lineáris leképezést, amely az x irányban az yz síkra merőlegesen vetít, az y irányban kétszeresére, a z irányban háromszorosára nyújt. Írjuk fel a leképezés mátrixát, majd a segítségével számoljuk ki az $\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ vektor képét.

8. (a) Igaz-e, hogy minden korlátos sorozat konvergens? Írjuk le az előző állításban szereplő két fogalom (korlátos, konvergens) definícióját.
   (b) A fenti két fogalom (korlátos, konvergens) közül melyek teljesülnek az
$$a_n=\frac{1}{2n+1} \qquad b_n=\frac{n-n^2}{n+1} \qquad c_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$$
sorozatok esetén?

9. (a) Mit állít a L'Hospital-szabály? (A szabály egyszeri alkalmazására vonatkozó legegyszerűbb változatot mondjuk ki.)
   (b) Számoljuk ki a segítségével a
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\ln(2x-1)}$$
függvényhatárértéket.

Minden feladat 7 pontos.