Matematika EP1 vizsga, 2020. dec. 21.

Kérem, hogy a dolgozat elejére írja: „Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül készítem.” Majd írja ezt alá.

Az elkészített dolgozatot kérem pdf formátumban feltölteni a https://edu.epitesz.bme.hu/ oldalon a Matematika EP1 – BMETE90AX33 mappában a 1. vizsgához.

Integrálási feladatok (kritérium: a sikeres vizsgához az alábbi három feladatból legalább 6 pontot el kell érni)

1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2+1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2-x-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

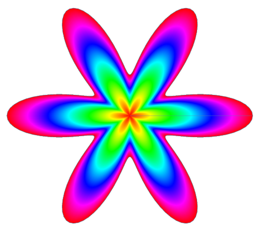
1. Mennyi az
$$\int \frac{4x^2+2x-2}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$
határozatlan integrál értéke?

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{3x+2x^{-1/2}}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{2x-3x^{-1}}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

2. Számítsuk ki az
$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{2x\sqrt{x}-3}{x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x$$
határozott integrált.

3. Karácsonyra az ábrán látható csillag alakú mézeskalácsot készítjük el, amelyet színes szórócukorral díszítünk. A csillag körvonalát centiméterben az $r(\varphi) = 2+\sin(6\varphi)$ polárkoordinátás összefüggés adja meg, ahol $\varphi \in [0, 2\pi]$. Mekkora a karácsonyi csillag területe?
Segítség: a képletgyűjteményben szereplő integrálformula integrandusában végezzük el a négyzetre emelést, és az integrálást tagonként végezzük el felhasználva a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ összefüggést.



Számítási feladatok

4. Hozzuk lépcsős alakra az
$$\begin{aligned} x-3y+2z&=1\\ 2x-5y+7z&=5\\ -2x+8y+az&=b \end{aligned}$$
egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire nincs az egyenletrendszernek megoldása? A választ indokoljuk.

4. Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + 7z &= 5 \\ -2x + 8y + az &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása? A megoldást nem kell kiszámolni. A választ indokoljuk.

4. Hozzuk lépcsős alakra az

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + 7z &= 5 \\ -2x + 8y + az &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol x, y, z az ismeretlenek. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeire van az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása? A megoldásokat nem kell kiszámolni. A választ indokoljuk.

5. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin(2x - \pi)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2}$$

függvényhatárértéket.

5. Számoljuk ki a

$$\lim_{x \to -\pi/2} \frac{\sin(x + \pi/2)}{\ln|x| - \ln \pi + \ln 2}$$

függvényhatárértéket.

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (2 - x)e^{3x-4}$ függvény $x_0 = 2$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (x - 3)e^{2x-7}$ függvény $x_0 = 4$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges az $f(x) = (x + 1)e^{3-2x}$ függvény $x_0 = 1$ pontban húzott érintőegyenesére, és amely átmegy az érintési ponton.

Elméleti feladatok

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknek a két koordinátája egymás ellentettje? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknél a két koordináta abszolút értéke egymással egyenlő? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

7. Alteret alkot-e az $\mathbb{R}^2$ vektortérben azon vektorok halmaza, amelyeknek x koordinátája megegyezik az y koordináta négyzetével? A választ indokoljuk.

   Segítség: ábrázoljuk az adott ponthalmazt a síkon.

8. Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{2n + 1}{n - 1}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

8. Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{n - 1}{3n + 6}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

8. Állapítsuk meg az

$$a_n = \frac{n-5}{2n+2}$$

sorozat határértékét, és a konvergens sorozat definíciója alapján keressük meg az $\varepsilon = 0{,}1$ értékhez tartozó küszöbindexet.

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$$

végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x (\ln x)^2} \, \mathrm{d}x$$

végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

9. Az improprius integrál definíciója alapján írjuk fel, mit értünk az

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} \, \mathrm{d}x$$

végtelen intervallumon vett integrálon, majd számítsuk ki az integrál értékét.

Minden feladat 7 pontos.